	ANNEE UNIVERSITAIRE 2018/2019 CODE UE : 4TPM103 U **Annales, Examens, Devoir Maison BMS** L'équipe pédagogique	Collège Sciences &Technologies

Annales, examens, devoir maison
Bases de Mathématiques pour les Sciences

université de BORDEAUX	ANNEE UNIVERSITAIRE 2016/2017 CODE UE : 4TPM103 U (Bases mathématiques pour les sciences) Devoir Maison à rendre avant le 26 octobre 2016	Collège Sciences &Technologies

Exercice 1. Soit $a, b \in \mathbb{R}$. On considère la proposition (P) suivante :

$$(\forall \epsilon > 0, \quad a < b + \varepsilon) \Longrightarrow (a \leq b)$$

(1) Montrer que (P) est vraie par contraposée.

(2) Montrer que la réciproque de (P) est également vraie pour tous a et b.

Exercice 2. Soit E un ensemble et A, B et C trois sous–ensembles de E.
Montrer les équivalences suivantes :

(1) $A \subset B \iff \complement_E B \subset \complement_E A$.

(2) $A \subset B \iff A \cup B = B$

(3) $A \subset B \iff A \cap B = A$

(4) $A \subset B \iff \complement_E A \cup B = E$

(5) $(A \cap B = A \cap C$ et $A \cup B = A \cup C) \iff B = C$

Exercice 3. Soit q un nombre complexe différent de 1. Montrer par récurrence que pour tout entier $n \geq 0$

$$\sum_{k=0}^{n} q^k = \frac{q^{n+1} - 1}{q - 1}.$$

Exercice 4.

(1) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation

$$|x + 3| \geq |x| + |x - 3|.$$

(2) Représenter graphiquement l'ensemble

$$E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,/\, |x - 1| \leq 1 \text{ et } |x| + |x - 3| \leq y \leq |x + 3|\}.$$

Exercice 5. Déterminer tous les polynômes de degré 3, $P(X) = aX^3 + bX^2 + cX + d$ qui vérifient

$$\begin{cases} P(2) & = & 32 \\ P(1) & = & 8 \\ P(-1) & = & 2 \\ P(0) & = & 2. \end{cases}$$

Écrire le système associé et justifier chaque étape des opérations utilisées pour la résolution de ce système.

université de BORDEAUX	ANNEE UNIVERSITAIRE 2016/2017 CODE UE : 4TPM103 U (Bases mathématiques pour les sciences) Devoir surveillé Date : 08/11/2016 Heure : 09h00 Durée : 1h30 Documents : Non autorisés. La calculette homologuée par l'Université est le seul matériel électronique autorisé.	Collège Sciences &Technologies

Exercice 1. [3 points] On considère les trois assertions suivantes :

(a) $\exists x \in \mathbb{R} \quad \forall y \in \mathbb{R}, \quad 2x - 3y > 0,$

(b) $\forall x \in \mathbb{R} \quad \exists y \in \mathbb{R}, \quad 2x - 3y > 0,$

(c) $\forall x \in \mathbb{R} \quad \forall y \in \mathbb{R}, \quad 2x - 3y > 0.$

(1) Écrire la négation des assertions (a), (b) et (c).

(2) Les assertions (a) , (b) et (c) sont-elles vraies ou fausses ? Justifier.

Exercice 2. [3 points] Soit x un nombre réel. On considère la proposition P suivante :

$$x^3 + x^2 - 2x < 0 \Longrightarrow x < 1$$

(1) Écrire la contraposée de P.

(2) La proposition P est-elle vraie ? Justifier.

Exercice 3. [6 points] **(1)** Résoudre les inéquations suivantes :

(a) $|2x - 3| \leq 5$.

(b) $|x + 2| \geq |x| + |x - 2|$.

(2) Soit $I = \{x \in \mathbb{R} : |2x - 3| \leq 5\}$ et $J = \{x \in \mathbb{R} : |x + 2| \geq |x| + |x - 2|\}$.
Écrire sous forme d'intervalles les ensembles suivants $I \cap J$ et $I \cup J$.

Exercice 4. [5 points] **(1)** Résoudre le système suivant en indiquant les transformations utilisées à chaque étape

$$\begin{cases} 4a + 2b + c & = & 4 \\ a + b + c & = & 1 \\ a - b + c & = & -3. \end{cases}$$

(2) Déterminer tous les polynômes de degré 3, $P(X) = aX^3 + bX^2 + cX + d$ qui vérifient

$$\begin{cases} P(2) & = & 9 \\ P(1) & = & 2 \\ P(-1) & = & 4 \\ P(0) & = & 1. \end{cases}$$

(On pourra s'aider du résultat obtenu à la question précédente.).

Exercice 5. [3 points] Montrer par récurrence que pour tout entier $n \geq 1$

$$\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}.$$

On rappelle que la notation $\sum_{k=1}^{n} k$ désigne la somme $1 + 2 + \ldots + n$.

Question bonus sur 2 points : en déduire l'expression de $\sum_{k=1}^{n} (2k + 1)$.

	ANNEE UNIVERSITAIRE 2016/2017 CODE UE : 4TPM103 U (Bases mathématiques pour les sciences) Devoir surveillé terminal Date : 17/01/2017 Heure : 14h30 Durée : 3h Documents : Non autorisés. La calculette homologuée par l'Université est le seul matériel électronique autorisé.	Collège Sciences &Technologies

Exercice 1. [3 points : 0.5+1.5+1] On considère le nombre complexe $Z = (1+i)(\sqrt{3}+i)$.

(1) Déterminer l'écriture algébrique (ou cartésienne) de Z,

(2) Donner le module et l'argument de $1+i$, $\sqrt{3}+i$ puis de Z.

(3) En déduire la valeur de $\cos\left(\frac{5\pi}{12}\right)$ et de $\sin\left(\frac{5\pi}{12}\right)$. Détailler les étapes, il ne sera pas pris en compte un résultat donné sans justification.

Exercice 2. [4 points :1+1+0.5+0.5+1]

(1) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation
$$\delta^2 = 5 + 12i.$$

(2) Résoudre maintenant dans $\mathbb{C}$ l'équation
$$z^2 - z - 1 - 3i = 0.$$

(3) Soit $y \in \mathbb{R}$. Déterminer la parties réelle et la partie imaginaire de
$$Z = -iy^3 + (1+3i)y^2 - iy - 9 + 3i.$$

(4) Montrer que l'équation
$$z^3 - (1+3i)z^2 - z - 9 + 3i = 0.$$
admet dans $\mathbb{C}$ une solution imaginaire pure et la calculer.

(5) A l'aide des questions (3) et (4) déterminer toutes les solutions dans $\mathbb{C}$ de l'équation
$$z^3 - (1+3i)z^2 - z - 9 + 3i = 0.$$

Exercice 3. [3 points : 1+1+1] Soit la fonction
$$f(x) = \begin{cases} x^2 \ln x & \text{si} \quad x > 0, \\ 0 & \text{si} \quad x \leq 0. \end{cases}$$

(1) Étudier la continuité de f sur $\mathbb{R}$.

(2) Étudier la dérivabilité de f sur $\mathbb{R}$.

(3) Calculer $\displaystyle\int_1^e f(x)dx$.

Exercice 4. [3 points : 1+0.5+0.5+1] Calculer les limites suivantes

(1) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{x} - \ln(x)}{e^x - x^2}$.

(2) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{x^2+1}}{x - \sqrt{x}}$.

(3) $\lim_{x\to\frac{\pi}{4}} \dfrac{\cos x - \frac{\sqrt{2}}{2}}{x-\frac{\pi}{4}}$.

(4) $\lim_{x\to\frac{1}{2}} \dfrac{\arcsin(x) - \frac{\pi}{6}}{2x-1}$.

Exercice 5. [3 points : 0.5+0.5+1+1] Soit la fonction f définie sur $[-\dfrac{\pi}{2};\dfrac{\pi}{2}]$ par

$$f(x) = x + \cos x, \qquad \forall x \in [-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}].$$

(1) Justifier que f est dérivable set déterminer f'.

(2) Dresser le tableau de variation de f.

(3) Justifier que f est bijective de $[-\dfrac{\pi}{2};\dfrac{\pi}{2}]$ sur un intervalle J que l'on explicitera. On note f^{-1} sa bijection réciproque.

(4) On remarque que $f(0) = 1$. Justifier que f^{-1} est dérivable en 1 et calculer $\left(f^{-1}\right)'(0)$.

Exercice 6. [6 points : 1.5+1+2+0.5+1]

(1) Calculer pour $x \geq 0$ les trois primitives suivantes

$$I(x) = \int_0^x \frac{1}{t+1}\,dt, \quad J(x) = \int_0^x \frac{1}{(t+1)^2}\,dt, \quad K(x) = \int_0^x \frac{1}{t^2+1}dt.$$

(2) Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}\setminus\{-1\}$ par

$$f(x) = \frac{t^3-t^2-t-1}{(t+1)^2(t^2+1)}, \qquad \forall t \in \mathbb{R}\setminus\{-1\}.$$

On admet (et on ne demande pas de le démontrer) qu'il existe $(a,b,c) \in \mathbb{R}^3$ tels que

$$\frac{t^3-t^2-t-1}{(t+1)^2(t^2+1)} = \frac{a}{t+1} + \frac{b}{(t+1)^2} + \frac{c}{t^2+1}, \qquad \forall t \in \mathbb{R}\setminus\{-1\}.$$

En calculant $f(0)$, $f(1)$ et $f(2)$ montrer que (a,b,c) est solution de

$$\begin{cases} a+b+c=-1 \\ 2a+b+2c=-1 \\ 15a+5b+9c=1. \end{cases}$$

(3) Résoudre le système ci-dessus en indiquant les transformations utilisées à chaque étape.

(4) Pour $x \geq 0$, on pose

$$F(x) = \int_1^x \frac{t^3-t^2-t-1}{(t+1)^2(t^2+1)}dt.$$

En déduire que

$$F(x) = I(x) - J(x) - K(x).$$

(5) Calculer

$$\int_0^1 \frac{e^{4t}-e^{3t}-e^{2t}-e^t}{(e^t+1)^2(e^{2t}+1)}dt.$$

On pourra effectuer le changement de variable $x = e^t$.

Université de Bordeaux	ANNEE UNIVERSITAIRE 2017/2018 CODE UE : 4TPM103 U (Bases mathématiques pour les sciences) Devoir Maison à rendre avant le 20 octobre	Collège Sciences &Technologies

Exercice 1. Soit A, B, C trois ensembles. Montrer que

$$\begin{cases} A \cup B \subset A \cup C \\ A \cap B \subset A \cap C \end{cases} \Longrightarrow B \subset C$$

Exercice 2. Ecrire les contraposées des propositions suivantes et les démontrer (n et m sont deux entiers naturels non nuls, x et y sont des réels) :

(1) $xy \neq 0 \Longrightarrow x \neq 0$ et $y \neq 0$,
(2) $x \neq y \Longrightarrow (x+2)(y-2) \neq (x-2)(y+2)$,
(3) $nm = 1 \Longrightarrow n = m = 1$.

Exercice 3. Résoudre dans $\mathbb{R}$ les inéquations suivantes :

(1) $1 \leq |x-2|$
(2) $|2-3x| \leq 2$
(3) $0 \leq |4x+1| - |2-5x| \leq 1$.

Exercice 4. Trouver tous les quadruplets (a, b, c, d) de $\mathbb{R}^4$ solutions du système suivant en indiquant les transformations utilisées à chaque étape

$$\begin{cases} a + b + c + d = 6 \\ 2a + b + c - 3d = 3 \\ 3a - b + c - 4d = -1 \\ a + 2b - 2c + d = 2. \end{cases}$$

Exercice 5.

(1) Démontrer par calcul direct que pour $n \geq 1$

$$\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + (n+1)^2 = \frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6}.$$

(2) Montrer par récurrence que pour tout entier $n \geq 1$, on a :

$$\sum_{k=1}^{n} k^2 = 1^2 + 2^2 + \ldots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

On rappelle que la notation $\sum_{k=1}^{n} k^2$ désigne la somme $1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2$.

Université de Bordeaux	ANNEE UNIVERSITAIRE 2017/2018 CODE UE : 4TPM103 U (Bases mathématiques pour les sciences) Devoir surveillé Date : 09/11/2017 Heure : 14h30 Durée : 1h30 Documents : Non autorisés. La calculette homologuée par l'Université est le seul matériel électronique autorisé.	Collège Sciences &Technologies

EXERCICE 1. Les propositions suivantes sont-elles vraies ou fausses ? Justifier vos réponses. Lorsqu'elles sont fausses, énoncer leur négation.

(a) $\exists n \in \mathbb{N},\ n^2 > 7$

(b) $\forall n \in \mathbb{N},\ n^2 > 7$

(c) $\forall n \in \mathbb{N},\ \exists m \in \mathbb{N},\ m > n^2$

(d) $\exists n \in \mathbb{N},\ \forall m \in \mathbb{N},\ m > n^2$.

EXERCICE 2. Soient x et y deux nombres réels, donner la contraposée de l'implication suivante :

$$x < y \Longrightarrow x^2 < y^2.$$

La proposition suivante est-elle vraie ou fausse ? Justifier votre réponse

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \forall y \in \mathbb{R}, \qquad x < y \Rightarrow x^2 < y^2.$$

EXERCICE 3. Soient A, B, C trois ensembles. Montrer que

$$A \cup B = A \cap C \iff B \subset A \subset C.$$

EXERCICE 4. Résoudre dans $\mathbb{R}$ les inéquations suivantes :

1. $|x + 1| \leq 3$

2. $|2x + 1| \leq 4$

3. $|2x + 1| + |x + 1| \leq 5$.

EXERCICE 5. Échelonner puis résoudre le système suivant en indiquant les transformations utilisées à chaque étape

$$\begin{cases} -a + b + 3c = 6 \\ -3a + b + c = 8 \\ 2a - b + 3c = -2. \end{cases}$$

EXERCICE 6. **1.** Démontrer par calcul direct que pour $n \geq 0$

$$(n + 1)^2 + (2n + 3) = (n + 2)^2.$$

2. Démontrer par récurrence que pour tout entier $n \geq 0$, on a :

$$\sum_{k=0}^{n} (2k + 1) = (n + 1)^2.$$

On rappelle que la notation $\sum_{k=0}^{n} (2k + 1)$ correspond à la somme $1 + 3 + 5 + \ldots + (2n + 1)$.

Université de Bordeaux	ANNEE UNIVERSITAIRE 2017/2018 CODE UE : 4TPM103 U (Bases mathématiques pour les sciences) Devoir surveillé terminal Date : 15/01/2018 Heure : 14h30 Durée : 3h Documents : Non autorisés. La calculette homologuée par l'Université est le seul matériel électronique autorisé.	Collège Sciences &Technologies

Exercice 1. [2 points] Soit $w = (1+i)(1+i\sqrt{3})$.

1 Déterminer l'écriture algébrique (ou cartésienne) de w.

2 Donner le module et un argument de $1+i$, $1+i\sqrt{3}$ puis de w.

3 En déduire la valeur de $\cos(7\pi/12)$ et de $\sin(7\pi/12)$. Détailler les étapes. Un résultat non justifié ne sera pas pris en compte.

Exercice 2. [3 points]

1 Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation

$$\delta^2 = -15 + 8i.$$

(On pourra chercher δ sous la forme $a + ib$).

2 Résoudre maintenant dans $\mathbb{C}$ l'équation

$$z^2 + (3+2i)z + (5+i) = 0.$$

Exercice 3. [2.5 points] Soit $a, b \in \mathbb{R}$ et f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = \begin{cases} a\cos x + b\sin x, & \text{si} \quad x < 0, \\ xe^x, & \text{si} \quad x \geq 0. \end{cases}$$

1 À quelle condition sur a et b, la fonction f est-elle continue sur $\mathbb{R}$?

2 À quelle condition sur a et b, la fonction f est-elle dérivable sur $\mathbb{R}$?

3 Calculer à l'aide d'une intégration par parties $\displaystyle\int_0^2 f(x)\,dx$.

Exercice 4. [3 points] On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = x - 1 + \ln\,(x^2+1).$$

1 Justifier que f est dérivable, calculer f' et dresser le tableau de variations de f (on pensera à calculer la limite de f en $-\infty$ et $+\infty$) .

2 Montrer que f définit une bijection de l'intervalle $I = [0, +\infty[$ sur un intervalle J à déterminer.

3 Calculer $f(1)$ et $f'(1)$.

4 Soit $g = f^{-1}$ la fonction réciproque de la fonction $f \ : \ I \to J$. Montrer que g est dérivable sur J et calculer $g'(\ln\,(2))$.

Exercice 5. [2 points] Calculer les limites suivantes.

1 $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x^3+2\ln x+1}{e^x+1}$.

2 $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x^2+5}}{x}$.

3 $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}} \dfrac{\sin x-\frac{\sqrt{2}}{2}}{x-\frac{\pi}{4}}$.

4 $\lim\limits_{x\to\frac{1}{2}} \dfrac{\arctan(4x^2)-\frac{\pi}{4}}{2x-1}$.

Exercice 6. [4 points]

1 Calculer les intégrales suivantes

$$A=\int_0^1 \frac{1}{x+1}\,dx, \quad B=\int_0^1 \frac{x}{x^2+1}\,dx, \quad C=\int_0^1 \frac{1}{x^2+1}\,dx.$$

2 Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}\setminus\{-1\}$ par

$$f(x)=\frac{1}{x^3+x^2+x+1}.$$

Trouver les réels $a,b,c\in\mathbb{R}$ tels que pour tout x différent de -1 on a

$$\frac{1}{x^3+x^2+x+1}=\frac{a}{x+1}+\frac{bx+c}{x^2+1}.$$

3 En déduire

$$\int_0^1 f(x)dx.$$

4 Calculer

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos t}{(\sin t)^3+(\sin t)^2+(\sin t)+1}dt,$$

on pourra effectuer le changement de variable $x=\sin t$.

Exercice 7. [4.5 points]

1 Déterminer les solutions de l'équation différentielle

$$y'(x)+xy(x)=0.$$

2 Trouver les réels $a,b\in\mathbb{R}$ tels que la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=ax+b$ soit une solution particulière de

$$y'(x)+xy(x)=x^2-x+1.$$

3 Avec la méthode de la variation de la constante trouver une solution particulière de

$$y'(x)+xy(x)=xe^{-\frac{x^2}{2}}.$$

4 Déduire des trois questions précédentes l'ensemble des solutions de l'équation différentielle suivante :

$$(E): \qquad y'(x)+xy(x)=x^2-x+1+xe^{-\frac{x^2}{2}}.$$

5 Quelle est la solution de (E) vérifiant $y(0)=1$?

Université de Bordeaux	ANNEE UNIVERSITAIRE 2017/2018 2ème session CODE UE : 4TPM103 U Bases mathématiques pour les sciences Durée : 3h Documents : Non autorisés. La calculette homologuée par l'Université est le seul matériel électronique autorisé.	Collège Sciences &Technologies

Exercice 1. [2.5 points]

Soit n un entier naturel. On considère la proposition P suivante :

$$n \textbf{ pair } \Longrightarrow n^2 - 3n \textbf{ pair}$$

(1) Écrire la proposition P avec les connecteurs $\neg$, $\wedge$ ou $\vee$ (et sans $\Longrightarrow$ ou $\Longleftrightarrow$).

(2) Écrire la contraposée de P.

(3) La proposition P est-elle vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$? Justifier.

Exercice 2. [2.5 points]

Résoudre d'abord dans $\mathbb{C}$ l'équation $\delta^2 = 3 - 4i$ et puis

$$z^2 - 5iz - 7 + i = 0.$$

Exercice 3. [3 points]

Calculer les limites suivantes

1 $\displaystyle \lim_{x \to \frac{\pi}{4}} \frac{\cos x - \frac{\sqrt{2}}{2}}{x - \frac{\pi}{4}}$.

2 $\displaystyle \lim_{x \to +\infty} \frac{\sqrt{2x} + (\ln 3x)^2}{e^{2x} + x^5}$.

3 $\displaystyle \lim_{x \to 1} \frac{e^x - e}{x - 1}$.

4 $\displaystyle \lim_{x \to 1^-} \text{Arctan } \frac{1}{x - 1}$.

Exercice 4. [2.5 points]

Résoudre le système suivant en indiquant les transformations utilisées à chaque étape.

$$\begin{cases} 2a - b - c - d = -1 \\ a - 3b + c + d = -2 \\ a + b - 2c + 4d = 4 \\ a - b + c - 2d = -8. \end{cases}$$

Exercice 5. **[4 points]**

Soit la fonction f définie sur $[0,+\infty[$ par

$$f(x) = x^2 e^x - 1.$$

1 Justifier que f est dérivable et calculer $f'(x)$ pour tout réel $x > 0$.

2 Dresser le tableau de variation de f (on pensera à calculer la limite de f en $+\infty$).

3 Justifier que f est bijective de $[0,+\infty[$ sur un intervalle J que l'on donnera. On note f^{-1} sa bijection réciproque.

4 Déterminer $a = f(1)$. Justifier que f^{-1} est dérivable en a et calculer $\left(f^{-1}\right)'(a)$.

5 En utilisant deux intégration par parties, calculer $\displaystyle\int_0^1 f(x)dx$.

Exercice 6. **[3 points]**

1 Trouver les réels a et b tels que pour tout u différent de -1 et de -2

$$\frac{1}{u^2+3u+2} = \frac{a}{u+1} + \frac{b}{u+2}.$$

2 Calculer

$$I = \int_1^e \frac{du}{u^2+3u+2}.$$

3 Calculer

$$J = \int_0^1 \frac{e^t}{e^{2t}+3e^t+2}dt,$$

on pourra effectuer le changement de variable $u = e^t$.

Exercice 7. **[3.5 points]**

Soit l'équation différentielle

$$y'(x) + x^2 y(x) = 3x^2 \qquad (E).$$

1 Déterminer toutes les solutions de l'équation homogène associée à (E).

2 Déterminer une solution particulière de (E).

3 En déduire la solution générale de l'équation (E).

4 Quelle est la solution vérifiant $y(0) = 2$?