Corrigé de l'interrogation 1

Exercice 1 (5 points) *Soit P et Q deux propositions logiques. Démontrez à l'aide d'une table de vérité que*

$$(P \Rightarrow Q) \ \equiv \ (\neg Q \Rightarrow \neg P).$$

Comment appelle-t-on l'implication $\neg Q \Rightarrow \neg P$?

P	Q	$P \Rightarrow Q$	$\neg P$	$\neg Q$	$\neg Q \Rightarrow \neg P$
V	V	V	F	F	V
V	F	F	F	V	F
F	V	V	V	F	V
F	F	V	V	V	V

On observe que $P \Rightarrow Q$ et $\neg Q \Rightarrow \neg P$ ont même valeur de vérité donc cela prouve que

$$(P \Rightarrow Q) \ \equiv \ (\neg Q \Rightarrow \neg P).$$

L'implication $\neg Q \Rightarrow \neg P$ est la *contraposée* de l'implication $P \Rightarrow Q$.

Exercice 2 (7 points) *Soit P la proposition logique définie par*

$$P : \forall n \in \mathbb{N},\ \exists m \in \mathbb{Z},\ n = m^2.$$

Donnez la négation de la proposition P.
La proposition P est-elle vraie ou fausse ? Justifiez.

$$\neg P : \exists n \in \mathbb{N},\ \forall m \in \mathbb{Z},\ n \neq m^2.$$

La proposition P est fausse. En effet raisonnons par l'absurde et supposons que P est vraie, c'est-à-dire que pour tout entier naturel n, il existe un entier relatif m tel que $n = m^2$.
Prenons par exemple $n = 2$, il existe alors $m \in \mathbb{Z}$, tel que $n = m^2$. Donc $m = \sqrt{2}$ ou $m = -\sqrt{2}$. Or il est facile de voir que $\sqrt{2}$ et $-\sqrt{2}$ ne sont pas des nombres entiers (car $0 \leq \sqrt{2} \leq 2$ et $0^2 \neq 2$, $1^2 \neq 2$ et $2^2 \neq 2$). C'est absurde. Ainsi P n'est pas vraie.

Exercice 3 (8 points) *Soit E, F et G trois ensembles. Montrez que*

$$(E \cup F \subset E \cup G \quad et \quad E \cap F \subset E \cap G) \quad \Longrightarrow \quad F \subset G.$$

Supposons que $E \cup F \subset E \cup G$ et $E \cap F \subset E \cap G$.
Soit $x \in F$, $x \in E \cup F$. Or $E \cup F \subset E \cup G$ donc $x \in E \cup G$.
Deux cas se présentent : $x \in E$ ou $x \in G$.
Si $x \in E$ on a alors que $x \in E \cap F$ (car on a considéré au début que $x \in F$). Or $E \cap F \subset E \cap G$ donc $x \in E \cap G$ et par conséquent $x \in G$.
Si $x \in G$, $\ldots$ $x \in G$.
Dans tous les cas $x \in G$ ce qui démontre que $F \subset G$.