Correction interrogation 3

Exercice 1

1. Par définition des fonctions puissances, la fonction f est définie sur $]0,+\infty[$ et pour tout $x>0$ on a
$$f(x)=x^{\frac{1}{x}}=e^{\frac{1}{x}\ln(x)}.$$
2. Les fonctions exponentielle, logarithme et inverse sont toutes dérivables sur $]0,+\infty[$, donc f est dérivable sur $]0,+\infty[$ en tant que composée de produit de fonctions dérivables sur $]0,+\infty[$. De plus on a pour tout $x\in]0,+\infty[$,
$$f'(x)=\left(\frac{-1}{x^2}\times\ln(x)+\frac{1}{x}\times\frac{1}{x}\right)e^{\frac{1}{x}\ln(x)}=(-\ln(x)+1)\frac{1}{x^2}e^{\frac{1}{x}\ln(x)}=(1-\ln(x))x^{\frac{1}{x}-2}.$$
3. La fonction ln est strictement croissante sur $]0,+\infty[$ et on a $\ln(e)=1$ donc pour tout $x\in]0,e[$, $1-\ln(x)>0$ et pour tout $x\in]e,+\infty[$, $1-\ln(x)<0$. Ainsi la fonction f est strictement croissante sur $]0,e[$ car f' est strictement positive et f est strictement décroissante sur $]e,+\infty[$ car f' est strictement négative. De plus $f(e)=e^{\frac{1}{e}}$. Concernant les limites de la fonction f en 0 et $+\infty$, on a (attention ici il n'y a pas de forme indéterminée donc il ne faut pas utiliser le théorème de croissance comparée)
$$\lim_{x\to0^+}\frac{1}{x}\ln(x)=-\infty\qquad\text{donc}\qquad\lim_{x\to0^+}f(x)=0$$
et par le théorème de croissance comparée (cette fois-ci on a une forme indéterminée)
$$\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x}\ln(x)=0\qquad\text{donc}\qquad\lim_{x\to+\infty}f(x)=1.$$
On peut résumé ceci par le tableau de variation suivant :

x	0		e		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	0	$\nearrow$	$e^{\frac{1}{e}}$	$\searrow$	1

4. La fonction f étant continue sur $]0,+\infty[$, on a d'après le théorème des valeurs intermédiaires et d'après le tableau de variation que l'équation $f(x)=\sqrt{2}$ admet une unique solution sur l'intervalle $]0,e[$ car $0\leq\sqrt{2}\leq e^{\frac{1}{e}}$ et l'équation $f(x)=\sqrt{2}$ admet une unique solution sur l'intervalle $]e,+\infty[$ car $1\leq\sqrt{2}\leq e^{\frac{1}{e}}$. Donc l'équation $f(x)=\sqrt{2}$ admet au total deux solutions sur $]0,+\infty[$. On peut vérifier que $f(2)=f(4)=\sqrt{2}$.
5. La fonction f est continue et strictement décroissante sur l'intervalle $[e,+\infty[$ donc d'après le théorème de la bijection, la fonction f est une bijection de $[e,+\infty[$ sur $J=f([e,+\infty[)=]1,e^{\frac{1}{e}}]$.
6. D'après la question 4, $f(4)=g(4)=\sqrt{2}$ donc $g^{-1}(\sqrt{2})=4$. De plus on a
$$(g^{-1})'(\sqrt{2})=\frac{1}{g'(g^{-1}(\sqrt{2}))}=\frac{1}{g'(4)}=\frac{1}{1-\ln(4)}4^{2-\frac{1}{4}}=\frac{8\sqrt{2}}{1-2\ln(2)}.$$

Exercice 2 Soit
$$f : x \mapsto \tan(\arcsin(x))$$

1. La fonction arcsin est définie sur $[-1,1]$ et la fonction tangente est définie sur $\mathbb{R} \setminus \{\frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$, donc f est définie sur l'ensemble $\{x \in [-1,1],\ \arcsin(x) \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$. Or arcsin est à valeurs dans $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ et $\arcsin(x) = -\frac{\pi}{2} \Leftrightarrow x = -1$ et $\arcsin(x) = \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow x = 1$. Ainsi la fonction f est définie sur $]-1,1[$.
2. On a pour tout $x \in]-1,1[$,
$$\tan(\arcsin(x)) = \frac{\sin(\arcsin(x))}{\cos(\arcsin(x))} = \frac{x}{\cos(\arcsin(x))}.$$
Or pour tout $y \in \mathbb{R}$, $\cos(y)^2 + \sin(y)^2 = 1$ donc pour $y = \arcsin(x)$, on obtient $\cos(\arcsin(x)) = \sqrt{1 - \sin(\arcsin(x))^2} = \sqrt{1 - x^2}$. Ainsi pour tout $x \in]-1,1[$,
$$\tan(\arcsin(x)) = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Exercice 2

Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose
$$I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(t)^n dt.$$

1. $I_0 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} 1 dt = \frac{\pi}{2}$ et
$$I_1 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(t) dt = [\sin(t)]_0^{\frac{\pi}{2}} = 1.$$
2. Pour tout $n \in \mathbb{N}$,
$$I_{n+2} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(t) \times \cos(t)^{n+1} dt.$$
On fait alors une intégration par partie en intégrant $\cos(t)$ et en dérivant $\cos(t)^{n+1}$:
$$\begin{aligned} I_{n+2} &= \left[\sin(t)\cos(t)^{n+1}\right]_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(t) \times (n+1)(-\sin(t))\cos(t)^n dt \\ &= (n+1) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(t)^2 \cos(t)^n dt \end{aligned}$$
3. Or $\cos(t)^2 + \sin(t)^2 = 1$, donc
$$I_{n+2} = (n+1) \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - \cos(t)^2)\cos(t)^n dt = (n+1)(I_n - I_{n+2}).$$
Ainsi en « regroupant » I_{n+2} on obtient,
$$I_{n+2} = \frac{n+1}{n+2} I_n.$$
4. Posons, pour tout $n \in \mathbb{N}$, P_n la propriété « $I_{2n} = \frac{(2n)!}{4^n (n!)^2}\ \frac{\pi}{2}$ et $I_{2n+1} = \frac{4^n (n!)^2}{(2n+1)!}$ ».
Il est facile de voir que P_0 est vraie d'après la question 1 (c'est l'initialisation).

Soit $n \in \mathbb{N}$, supposons que la propriété P_n soit vraie, montrons P_{n+1}.
D'après la question précédente et ensuite l'hypothèse de récurrence on a

$$\begin{aligned} I_{2n+2} &= \frac{2n+1}{2n+2}\, I_{2n} \\ &= \frac{2n+1}{2n+2}\, \frac{(2n)!}{4^n (n!)^2}\, \frac{\pi}{2} \\ &= \frac{(2n+2)(2n+1)}{(2n+2)^2}\, \frac{(2n)!}{4^n (n!)^2}\, \frac{\pi}{2} \\ &= \frac{(2n+2)!}{2^2 \times (n+1)^2 \times 4^n (n!)^2}\, \frac{\pi}{2} \\ &= \frac{(2n+2)!}{4^{n+1}((n+1)!)^2}\, \frac{\pi}{2} \end{aligned}$$

De même on obtient

$$I_{2n+3} = \frac{4^{n+1}((n+1)!)^2}{(2n+3)!}.$$

Ainsi la propriété P_{n+1} est vérifiée car on a $I_{2(n+1)} = I_{2n+2}$ et $I_{2(n+1)+1} = I_{2n+3}$.
Donc on vient de montrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$I_{2n} = \frac{(2n)!}{4^n (n!)^2}\, \frac{\pi}{2}$$

et

$$I_{2n+1} = \frac{4^n (n!)^2}{(2n+1)!}.$$