université de BORDEAUX	ANNEE UNIVERSITAIRE 2018/2019 CODE UE : 4TPM103 U **Bases mathématiques pour les sciences BMS** L'équipe pédagogique	Collège Sciences &Technologies

Table des matières

Motivation

Pour comprendre mieux l'objet de ce cours, on va en fait le décrire en commençant... par la fin.

L'étude des objets mathématiques a un intérêt en tant que tel, mais elle est aussi indispensable dans toutes les études scientifiques ; en effet c'est par une modélisation du monde en terme mathématiques qu'on arrive à des prédictions quantitatives et qu'on peut aussi obtenir une meilleure compréhension des phénomènes.

Par exemple, **en physique**, supposons que l'on souhaite décrire la trajectoire d'un solide soumis à certaines forces.
Si dans un premier temps on considère que ce solide est en fait un "point", si l'on suppose que l'on connaît les forces $\vec{F}$ qui s'exercent sur le solide, et si on note $x(t)$ la position dans l'espace du solide au temps t, on est amené à résoudre l'équation $m\vec{x}''(t) = \vec{F}$.

Oublions pour simplifier les flèches et qu'il s'agit de vecteurs : l'inconnue est une fonction x alors qu'on a une information sur sa dérivée seconde x'' : on doit résoudre une **équation différentielle**. (Ici elle est dite du *second ordre* car elle fait apparaître une dérivée seconde).

On rencontre aussi de telles équations en chimie, si on s'intéresse à l'évolution d'une concentration au cours du temps (**cinétique chimique**).

On verra en fin de semestre comment aborder l'étude de certaines de ces équations différentielles (du *premier ordre*, faisant apparaître des dérivées premières).

L'exemple le plus simple d'une telle équation différentielle consiste à chercher une fonction dont on connaît la dérivée : ce sera l'objet du calcul des **intégrales**, où l'on verra bien d'autres techniques que celles abordées au lycée.

Le calcul d'intégrale nécessitera bien évidemment le retour sur les notions de dérivée. D'autre part la recherche de solutions d'équations différentielles amène le besoin d'autres fonctions, et à élargir la palette des **fonctions usuelles**. Aux fonctions trigonométriques, exponentielles et log vues au lycée, vont s'ajouter les **fonctions puissances, les fonctions trigonométriques réciproques, etc**.

Pour les définir et étudier les propriétés de ces fonctions, et bien d'autres, on reverra et on approfondira les **fonctions, leur composition, les calculs de limites, de dérivées, etc**.

Nous avions ci-dessus commencé par oublier les flèches . Mais on a effectivement besoin de travailler avec des points dans le plan ou dans l'espace (et plus tard plus généralement avec des vecteurs avec n coordonnées) : ce sera l'occasion de revenir sur les techniques de **calcul vectoriel**, de revoir le **produit scalaire** et de définir le **produit vectoriel** de deux vecteurs (deux notions de produits bien différentes) ; ce sera aussi l'occasion d'aborder les techniques de résolution de **systèmes linéaires** (**pivot de Gauss**). On reviendra enfin sur la **trigonométrie**, et sur les **nombres complexes** : outil très utile pour la géométrie dans le plan, outil également très utile pour la résolution de certaines équations en **électricité ou électronique**, ils ont une importance théorique fondamentale en mathématiques. S'ils permettent de trouver les racines des polynômes de degré 2, ils sont en fait essentiels pour l'étude des polynômes de tout degré ; on en verra en particulier l'utilité dans la recherche des nombres complexes solutions de $z^n = 1$.

Tout ceci suppose bien assimilées un certain nombre de techniques et de règles de calcul. On reviendra en particulier sur les **inégalités**, la **valeur absolue**, et on reprécisera ce que sont les **nombres réels** et **rationnels**. On verra aussi la **formule du binôme**, et une définition du coefficient binomial hors de toute loi binomiale.

Enfin, une caractéristique des mathématiques est qu'un théorème démontré n'a pas à être testé et confronté à la réalité, on sait qu'il est vrai. Cela se fait grâce à une exigence de rigueur dans le **raisonnement**. Il faut pour cela bien expliciter le **langage mathématique de la logique**, ce que signifient précisément les symboles $\Rightarrow$, $\forall$, $\exists$, mais aussi $\cap$, $\cup$... Ce premier chapitre sera essentiel dans toute la suite puisqu'il explicite le vocabulaire et les règles de raisonnement utilisées par tout cours de mathématiques. Mais Ce langage de la logique (dont la base est Vrai/Faux) sera aussi assez naturellement celui de **l'informatique** (à base de 0/1).

Ce cours correspond à l'enseignement dispensé dans l'UE Bases de Mathématiques pour les Sciences de la Licence de Mathématiques du portail MISIPCG. Il s'appuie sur le programme de Terminale. L'utilisation du site interactif de ressources multimédia en ligne, Le serveur WIMS, site interactif de ressources multimédia en ligne, sera utilisé pour la «pratique» active des exercices. Les Annales des DST et DS et DM sont également disponibles sur la plateforme Moodle.

Les modalités de contrôle :

- Contrôle continu : un DS Devoir Surveillé de 1H30, 3 tests, un DM Devoir à la maison et Exercices WIMS
- DST devoir surveillé terminal Examen de la 1ere Session 3h.

Les modalités d'utilisation de WIMS seront communiquées par email et affichées sur Moodle https ://moodle1.u-bordeaux.fr/course/view.php ?id=1174

L'équipe pédagogique

1

Rudiments de logique et de théorie des ensembles

1.1 Opérations logiques

Une *proposition logique*, concernant divers objets mathématiques, est un énoncé qui doit être ou bien vrai (ce que l'on note V) ou bien faux (ce que l'on note F).

On construit avec ces propositions (ou "variables propositionnelles") de nouvelles propositions (ou "formules propositionnelles") en utilisant les connecteurs logiques suivants

1. La négation "**non**", notée $\neg$
2. La disjonction logique "**ou**", notée $\vee$
3. La conjonction logique "**et**", notée $\wedge$
4. L'**implication**, notée $\Rightarrow$
5. L'**équivalence**, notée $\Leftrightarrow$

La *valeur de vérité* d'une formule propositionnelle, c'est-à-dire l'interprétation de cette formule une fois que l'on s'est fixé des valeurs de vérité de ses variables propositionnelles, est définie par sa *table de vérité*. Ainsi, pour les formules définies par les connecteurs logiques élémentaires, on a les tables suivantes :

p	$\neg p$
F	V
V	F

p	q	$p \vee q$
F	F	F
F	V	V
V	F	V
V	V	V

p	q	$p \wedge q$
F	F	F
F	V	F
V	F	F
V	V	V

p	q	$p \Rightarrow q$
F	F	V
F	V	V
V	F	F
V	V	V

p	q	$p \Leftrightarrow q$
F	F	V
F	V	F
V	F	F
V	V	V

Attention :

1. Dans le langage courant, “ou” a en général un sens exclusif (fromage “ou” dessert). En mathématiques, le “ou” est toujours “inclusif” : si p et q sont toutes les deux vraies, $p \vee q$ est vraie.

2. Dire que "$p \Rightarrow q$ est vrai" ne signifie pas que p est vraie mais seulement que *si l'hypothèse p est vraie, alors la conclusion q l'est aussi*.

   Noter en particulier que, si p est fausse, $p \Rightarrow q$ est vrai... C'est pour cela que pour démontrer une implication $p \Rightarrow q$, on fait l'hypothèse que p est vraie, puisque si p est fausse il n'y a rien à démontrer...

3. La formule $p \Rightarrow q$ peut s'exprimer à l'aide des symboles de conjonction et de disjonction par l'une ou l'autre des phrases suivantes :
   - $\neg p \vee q$
   - $\neg (p \wedge (\neg q))$.

4. Lorsqu'une implication $p \Rightarrow q$ est vraie, on l'utilise ensuite dans des raisonnements « p est vraie et $p \Rightarrow q$ est vraie dont q est vraie ».

⚠ Un abus courant consiste à confondre une *formule propositionnelle* et sa *valeur de vérité*. Ainsi, dans un texte mathématique, $\boxed{\text{on écrira souvent "}p \Rightarrow q\text{" pour dire que "}p \Rightarrow q\text{ est vraie"}}$.

Avec cet abus de notation la formule "$p \Rightarrow q$" se dit aussi parfois "si p, alors q", ou bien "p implique q", ou bien "pour que p soit vraie, il faut que q soit vraie", ou encore

- "une **condition suffisante** pour q est p",
- "une **condition nécessaire** pour p est q".

Définition 1.1. *On dit que deux formules propositionnelles F et G sont* équivalentes *et on écrit parfois $F \equiv G$), si elles ont même table de vérité.*

Voici quelques exemples importants de formules équivalentes :

- $\neg(p \wedge q)$ est équivalent à $(\neg p) \vee (\neg q)$.
- $\neg(p \vee q)$ est équivalent à $(\neg p) \wedge (\neg q)$.
- $(p \Leftrightarrow q)$ est équivalent à $((p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p))$.
- $(p \Rightarrow q)$ est équivalent à $((\neg q) \Rightarrow (\neg p))$
- $\neg(p \Rightarrow q)$ est équivalent à $p \wedge (\neg q)$

Exercice 1. *(associativité et distributivité des connecteurs logiques)*

- $p \wedge (q \wedge r)$ est équivalent à $(p \wedge q) \wedge r$.
- $p \vee (q \vee r)$ est équivalent à $(p \vee q) \vee r$.
- $p \wedge (q \vee r))$ est équivalent à $(p \wedge q) \vee (p \wedge r)$
- $p \vee (q \wedge r)$ est équivalent à $(p \vee q) \wedge (p \vee r)$

1.2 Quantificateurs

En mathématiques, on est amené à manipuler des propositions dépendant d'une variable parcourant un ensemble [1]. C'est dans ce contexte que l'on introduit les quantificateurs « $\forall$ » et « $\exists$ ».

1. On ne donnera pas de définition formelle de la notion d'ensemble, si ce n'est dire qu' « *un ensemble est une collection d'éléments, donnés dans un ordre indifférent* » . On note $x \in E$ pour indiquer que x est un élément de l'ensemble E.

Définition 1.2.

- *Le symbole* $\forall$ *signifie « quel que soit »(ou « pour tout »), on l'appelle le* quantificateur universel.
- *Le symbole* $\exists$ *signifie « il existe », on l'appelle le* quantificateur existentiel.

Si $p(x)$ *est une proposition dépendant d'une variable* x *qui appartient à un ensemble* E*, on définit deux nouvelles formules, à l'aide des quantificateurs* $\forall$ *et* $\exists$ *:*

1. *La proposition*
$$\boxed{\forall x \in E,\ p(x)}$$
qui est vraie si **la proposition p(x) est vraie pour tous les éléments x de E**.
2. *La proposition*
$$\boxed{\exists x \in E,\ p(x)}$$
*qui est vraie s'***il existe au moins un élément x de E pour lequel p(x) est vraie** .

Remarques :

1. Les variables sont muettes : $\forall x,\ p(x)$ et $\forall y,\ p(y)$ désignent la même proposition.
2. La négation de $(\forall x \in E,\ p(x))$ est $(\exists x \in E,\ \neg(p(x)))$.
3. La négation de $(\exists x \in E,\ p(x))$ est $(\forall x \in E,\ \neg(p(x)))$.
4. En général, $(\forall x \in E, \exists y \in E, p(x,y))$ et $(\exists y \in E, \forall x \in E, p(x,y))$ sont deux propositions différentes.
5. Pour montrer que "$\exists x \in E, p(x)$" est vraie, il suffit de trouver un x particulier dans l'ensemble E pour lequel $p(x)$ est vraie. Pour montrer que "$\forall x \in E, p(x)$" est vraie, *un tel exemple ne suffit pas*.

   Montrer que "$\forall x \in E, p(x)$" est faux revient à montrer que "$\exists x \in E, \neg p(x)$" est vraie, donc il suffit de trouver un **contre-exemple**, c'est-à-dire un x pour lequel $p(x)$ est faux.

1.3 Raisonnement par contraposée

Principe : Soient p et q deux propositions. Supposons que l'on veuille prouver que la proposition $p \Rightarrow q$ est vraie. Le principe de **contraposition** assure qu'il est équivalent de démontrer que la proposition $(\neg q) \Rightarrow (\neg p)$ est vraie, que l'on appelle la **contraposée** de $p \Rightarrow q$.

Attention : Ne pas confondre la contraposée de $p \Rightarrow q$, qui est $\neg q \Rightarrow \neg p$, avec sa **réciproque** "$q \Rightarrow p$". La contraposée est équivalente à la proposition de départ, la réciproque ne l'est en général pas.
Exemple : soient x et y deux réels. Montrer que

$$x \neq y \quad \Rightarrow \quad (x+1)(y-1) \neq (x-1)(y+1).$$

Pour cela, montrons la contraposée de cette implication, qui est

$$(x+1)(y-1) = (x-1)(y+1) \quad \Rightarrow \quad x = y.$$

Supposons donc que $(x+1)(y-1) = (x-1)(y+1)$. En développant, on obtient $xy + y - x - 1 = xy - y + x - 1$. Après simplification, $x = y$.

1.4 Raisonnement par l'absurde

Le **raisonnement par l'absurde** est un principe de démonstration fondé sur le principe logique du **tiers exclu** qui affirme que $p \vee \neg(p)$ est toujours vrai.

Principe de la démonstration par l'absurde : Supposons que l'on veuille prouver que la proposition p est vraie. On suppose que $\neg(p)$ est vraie (ou que p est fausse), et l'on exhibe une contradiction, en utilisant notre système d'axiomes et/ou les règles de déduction logique. On en conclut alors que l'hypothèse faite sur p est fausse, donc que p est vraie.

Exemple : montrons par l'absurde que $x^3 - 2x^2 + 10x - \sqrt{2}$ n'admet pas de racine entière.

On suppose que la propriété est fausse, c'est-à-dire que $x^3 - 2x^2 + 10x - \sqrt{2}$ admet (au moins une) racine entière. On note n_0 une telle racine. On a donc $n_0^3 - 2n_0^2 + 10n_0 - \sqrt{2} = 0$. Donc $\sqrt{2} = n_0^3 - 2n_0^2 + 10n_0$. Mais n_0 est entier, donc $n_0^3 - 2n_0^2 + 10n_0$ également. Donc $\sqrt{2}$ est entier, ce qui est impossible.

Par conséquent $x^3 - 2x^2 + 10x - \sqrt{2}$ n'admet pas de racine entière.

La démonstration par l'absurde est très souvent utilisée pour montrer une non-existence, ou l'unicité de quelque chose.

1.5 Raisonnement par récurrence

Le raisonnement par récurrence est un principe de démonstration qui s'applique lorsque l'on veut démontrer qu'une certaine propriété $\mathcal{P}(n)$, dépendant d'un entier naturel n, est vraie pour tout entier (exemple : "montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, le nombre $10^n - 1$ est un multiple de 9").

L'ensemble $\mathbb{N}$ des *entiers naturels* possède la propriété remarquable que chacune de ses parties non vides admet un plus petit élément [2]. Cette propriété est à la base du raisonnement par récurrence, dont le principe est rappelé ci-dessous :

Soit n_0 un entier, et $\mathcal{P}(n)$ une propriété de l'entier n, définie pour tout $n \geq n_0$. On fait les hypothèses suivantes :

(R1) La propriété $\mathcal{P}(n_0)$ est vraie.

(R2) Pour tout $n \geq n_0$, $(\mathcal{P}(n) \Rightarrow \mathcal{P}(n+1))$ est vraie.

Alors, la propriété $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour tout $n \geq n_0$.

1.6 Ensembles

1.6.1 Ensembles et parties d'un ensemble

Définition 1.3.

- *Un ensemble est une collection d'éléments, donnés dans un ordre indifférent. On note $x \in E$ pour indiquer que x est un élément de l'ensemble E.*
- *Si chaque élément d'un ensemble E est également élément de l'ensemble F on dit que E* **est inclus** *dans F, ou que E est* **une partie** *de F et on note $E \subset F$. On a donc :*

$$E \subset F \Leftrightarrow \forall x \in E, x \in F.$$

- *Il existe par convention un ensemble ne contenant aucun élément, c'est l'***ensemble vide** *noté $\emptyset$.*

2. Cette propriété "ne va pas de soi", et elle est en fait équivalente" au principe de récurrence. Il y a donc un apparent cercle vicieux dont l'éclaircissement dépasse le niveau de ce cours.

Méthode : pour montrer une inclusion $E \subset F$, on revient souvent à la définition : on montre $\forall x \in E, x \in F$.

Deux ensembles E et F sont égaux si et seulement si ils ont les mêmes éléments. Cela équivaut à dire que l'on a simultanément

$$E \subset F \text{ et } F \subset E.$$

C'est le principe de *"double inclusion"* que l'on utilise très souvent en pratique pour établir l'égalité de deux ensembles. Noter enfin que tout ensemble est contenu dans lui-même ($E \subset E$) et que l'ensemble vide est inclus dans tous les ensembles ($\emptyset \subset E$).

⚠ La notation $E \subset F$ signifie que E est inclus dans F « au sens large », c'est-à-dire que E est *éventuellement* égal à F. Pour distinguer inclusion *au sens strict* et *au sens large*, on introduit parfois les notations $E \subseteq F$ (E est inclus dans ou égal à F) et $E \subsetneq F$ (E est inclus dans F strictement). Les notations $E \subset F$ et $E \subseteq F$ signifient donc *exactement la même chose*.

On peut décrire un ensemble **en extension** en donnant tous ses éléments entre accolades (par exemple : $E = \{1, 3, 7, 5, 2\}$).
On peut aussi décrire un sous-ensemble E d'un ensemble F **en compréhension**, c'est-à-dire en donnant une propriété qui caractérise ses éléments : $E = \{x \in F \mid p(x)\}$ est l'ensemble de tous les éléments de F pour lesquels la propriété $p(x)$ est vraie (par exemple :
$\{x \in \mathbb{Z} \mid x^2 = 4\} = \{-2, 2\}$).
Enfin, on définit souvent un ensemble en donnant une manière de construire chacun de ses éléments ; par exemple $\{n^2, n \in \mathbb{N}\} = \{m \in \mathbb{N} \mid \exists n \in \mathbb{N}, m = n^2\}$.

Proposition 1.4. *Si A, B et C sont trois ensembles, on a l'implication*
$(A \subset B \text{ et } B \subset C) \Rightarrow (A \subset C)$.

Définition 1.5. *L'ensemble des parties d'un ensemble E, noté $\mathcal{P}(E)$ est formé de tous les ensembles inclus dans E. En particulier, il contient toujours $\emptyset$ et E.*

Exemple : $\mathcal{P}(\{0, 1\}) = \{\emptyset, \{0\}, \{1\}, \{0, 1\}\}$.

⚠ Les éléments de $\mathcal{P}(E)$ sont eux-mêmes des ensembles. En particulier, l'ensemble des parties du vide *n'est pas vide* : $\mathcal{P}(\emptyset) = \{\emptyset\}$ contient un élément, à savoir l'ensemble vide...

1.6.2 Opérations sur les ensembles

Définition 1.6. *Soient E et F deux ensembles. La* **réunion** *de E et F notée $E \cup F$ est formée des éléments qui appartiennent à E ou à F. On a donc*

$$x \in E \cup F \Leftrightarrow (x \in E \text{ ou } x \in F).$$

Définition 1.7. *Soient E et F deux ensembles. L'***intersection** *de E et F notée $E \cap F$ est formée des éléments qui appartiennent à E et à F. On a donc*

$$x \in E \cap F \Leftrightarrow (x \in E \text{ et } x \in F).$$

Si $E \cap F = \emptyset$ on dit que E et F sont **disjoints**.

Proposition 1.8. *Si E, F, G sont trois ensembles, on a les égalités suivantes :*

- *Commutativité :* $E \cup F = F \cup E$ *et* $E \cap F = F \cap E$
- *Associativité :* $(E \cup F) \cup G = E \cup (F \cup G)$ *et* $(E \cap F) \cap G = E \cap (F \cap G)$
- *Distributivité 1 :* $E \cup (F \cap G) = (E \cup F) \cap (E \cup G)$
- *Distributivité 2 :* $E \cap (F \cup G) = (E \cap F) \cup (E \cap G)$.
- $E \cup \emptyset = E$ *et* $E \cap \emptyset = \emptyset$
- $E \cap E = E \cup E = E$

Définition 1.9. *Soit E un ensemble et F une partie de E. Le* **complémentaire** *de F dans E noté $\complement_E F$ (ou parfois F^c) est l'ensemble des éléments de E qui n'appartiennent pas à F. On a donc $\complement_E F = \{x \in E / x \notin F\}$. En particulier, $\complement_E F \cup F = E$ et $\complement_E F \cap F = \emptyset$.*

Définition 1.10. *Soient F et G deux parties d'un ensemble E. L'ensemble $F \backslash G$ est l'ensemble formé des éléments de E qui appartiennent à F et pas à G. On a donc $F \backslash G = F \cap (\complement_E G)$. En particulier, $E \backslash F = \complement_E F$, $E \backslash \emptyset = E$*

Proposition 1.11. *Soient E un ensemble et A et B deux parties de E. On a les propriétés suivantes :*

1. $A \subset B \Longleftrightarrow \complement_E B \subset \complement_E A$.
2. $\complement_E (\complement_E A) = A$, $\complement_E (A \cap B) = \complement_E A \cup \complement_E B$, *et* $\complement_E (A \cup B) = \complement_E A \cap \complement_E B$.

Remarque : L'union, l'intersection et le complémentaire sont la traduction en terme d'appartenance à un ensemble des opérations logiques "et", "ou" et "non".

Définition 1.12. *Soient E et F deux ensembles. Le produit cartésien de E et F noté $E \times F$ est l'ensemble des couples (x, y) tels que x est éléments de E et y est élément de F.*

Exercice : $\{0,1\} \times \{0,1\} = \{(0,0), (0,1), (1,0), (1,1)\}$
$\{0,1\} \times \{2,3\} = \{(0,2), (0,3), (1,2), (1,3)\}$.

⚠ L'ordre dans un couple est important : $(0,1) \neq (1,0)$.

1.7 Formule du binôme

1.7.1 Dénombrement : principes de base

On se contente d'une notion intuitive de cardinal pour les ensembles finis ("nombre d'éléments").

Proposition 1.13. *Soient E et F deux ensembles finis.*

1. *"Principe de la somme". Si E et F sont disjoints, alors*
$$\mathrm{Card}(E \cup F) = \mathrm{Card}E + \mathrm{Card}F.$$
2. *"Principe du produit" :* $\mathrm{Card}(E \times F) = \mathrm{Card}E \times \mathrm{Card}F$

Corollaire 1.14.
1. *Si A est une partie d'un ensemble fini E, on a* $\mathrm{Card}\complement_E A = \mathrm{Card}E - \mathrm{Card}A$.
2. *Si E et F sont deux ensembles finis, non nécessairement disjoints, on a*
$$\mathrm{Card}(E \cup F) = \mathrm{Card}E + \mathrm{Card}F - \mathrm{Card}(E \cap F).$$

1.7.2 Combinaisons, coefficients binômiaux, formule du binôme

Définition 1.15. *Soit n un entier non nul. On appelle « n factoriel »et note $n! = \prod_{i=1}^{n} i = 1 \times 2 \times \cdots \times n$.*
Par convention $0! = 1$.

Ainsi $1! = 1$, $2! = 2$ et $3! = 6$.
Remarque : $n!$ correspond au nombre d'ordres possibles pour n objets.

Définition 1.16. *Soit $k \in \mathbb{N}^*$. Une **combinaison de** k **éléments parmi** n est une partie à k éléments d'un ensemble de cardinal n. Le nombre de combinaisons de k éléments parmi n est noté $\binom{n}{k}$ ou C_n^k.*

Par exemple si on a 50 personnes, il y a $\binom{50}{10}$ échantillons possibles de 10 personnes. Si on dispose d'un jeu de 32 cartes, il y a $\binom{32}{8}$ « mains »possibles différentes de 8 cartes.

Proposition 1.17.
1. *Pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a $\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1$.*
2. *Pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $k \in \mathbb{N}$ tel que $0 \leq k \leq n$, on a : $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$.*
3. *Si $0 < k < n$, on a : $\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}$.*

La propriété 1.173 est à la base du "triangle de Pascal" dont les premières lignes sont représentées sur la figure 1.1

$$
\begin{array}{ccccccccccccccc}
 & & & & & & & 1 & & & & & & & \\
 & & & & & & 1 & & 1 & & & & & & \\
 & & & & & 1 & & 2 & & 1 & & & & & \\
 & & & & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & & & & \\
 & & & 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 & & & \\
 & & 1 & & 5 & & 10 & & 10 & & 5 & & 1 & & \\
 & 1 & & 6 & & 15 & & 20 & & 15 & & 6 & & 1 & \\
1 & & 7 & & 21 & & 35 & & 35 & & 21 & & 7 & & 1
\end{array}
$$

FIGURE 1.1 – Triangle de Pascal

Remarques.

1. Le coefficient binomial $\binom{n}{k}$ est défini au lycée comme *"le nombre de chemins réalisant k succès pour n répétitions d'une même expérience aléatoire modélisées par un arbre"*. Cette définition est équivalente à celle adoptée ici.

2. Au lycée, on ne donne pas de formule explicite, en fonction de n et de k, pour le calcul des coefficients binomiaux $\binom{n}{k}$. Une telle formule s'obtient cependant très facilement à partir de la proposition 1.17 3, comme le montre le corollaire suivant.

Corollaire 1.18. *Si $0 \leq k \leq n$ sont deux entiers naturels, on a :*

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}.$$

Preuve. Récurrence sur n, en utilisant la proposition 1.17 3.

Proposition 1.19. *(Formule du binôme) Soient x et y deux réels (ou deux complexes) et n un entier naturel. On a*

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k y^{n-k}.$$

Preuve. On fait une récurrence sur n, pour x et y fixés.

Initialisation ($n = 0$) : on a $(x+y)^0 = 1 = \sum_{k=0}^{0} \binom{n}{k} x^k y^{n-k}$.

Hérédité : supposons la propriété vraie au rang n, c'est-à-dire

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k y^{n-k}$$

et montrons qu'elle se transmet au rang $n+1$. On a :

$$\begin{aligned}
(x+y)^{n+1} &= (x+y)(x+y)^n \\
&= (x+y) \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k y^{n-k} \text{ grâce à l'hypothèse de récurrence} \\
&= x \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k y^{n-k} + y \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k y^{n-k} \\
&= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^{k+\mathbf{1}} y^{n-k} + \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k y^{n+\mathbf{1}-k} \\
&= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^{k+1} y^{n+\mathbf{1}-(k+\mathbf{1})} + \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k y^{n+1-k} \\
&= \sum_{\ell=1}^{n+1} \binom{n}{\ell-1} x^{\ell} y^{n+1-\ell} + \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k y^{n+1-k} \text{ en posant } \ell = k+1 \\
&= \sum_{k=1}^{n+1} \binom{n}{k-1} x^{k} y^{n+1-k} + \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k y^{n+1-k} \\
&= y^{n+1} + \left[\sum_{k=1}^{n} \underbrace{\left(\binom{n}{k-1} + \binom{n}{k} \right)}_{\binom{n+1}{k}} x^k y^{n+1-k} \right] + x^{n+1} \\
&= \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} x^k y^{n+1-k}.
\end{aligned}$$

Donc notre formule est vraie pour tout $n \geq 0$ $\square$

Corollaire 1.20. *Si E est un ensemble fini de cardinal n, le nombre de parties de E est égal à 2^n.*

1.8 Exercices

1.8.1 Opérations logiques

Exercice 2. P, Q et R désignent trois propositions logiques.

1. Construire les tables de vérité des propositions suivantes :
   (a) $P \Rightarrow (Q \Rightarrow P)$
   (b) $(P \Rightarrow Q)$ ou $(Q \Rightarrow P)$
   (c) $(P \Rightarrow Q)$ et $(Q \Rightarrow P)$
2. Simplifier $(\neg(P \Rightarrow \neg Q))$
3. Exprimer sans $\Rightarrow$ ni $\Leftrightarrow$:
   (a) $\neg(P \Leftrightarrow Q)$
   (b) $\neg((P \vee Q) \Rightarrow Q)$

Exercice 3. Soient A, B, C, D 4 propositions. On sait que $A \Rightarrow B$, $B \Rightarrow C$ et $B \Rightarrow D$ sont vraies. Que peut-on déduire dans les situations suivantes :

1. On sait que B est vraie.
2. On sait que D est fausse.
3. On sait que B est fausse.

Exercice 4.

1. Laquelle des formules suivantes est équivalente à : $P \;\; et \;\; (P \;\; ou \;\; Q)$?
   (a) $P \;\; et \;\; Q$
   (b) $P \;\; ou \;\; Q$
   (c) P
   (d) Q
2. Laquelle des formules suivantes est équivalente à : $(P \;\; et \;\; Q) \;\; ou \;\; P$?
   (a) $P \;\; et \;\; Q$
   (b) $P \;\; ou \;\; Q$
   (c) P
   (d) Q

Exercice 5.

1. Quelle est la négation de : $(non \;\; P) \;\; et \;\; Q$?
   (a) $P \;\; et \;\; (non \;\; Q)$
   (b) $P \;\; ou \;\; (non \;\; Q)$
   (c) $(non \;\; P) \;\; ou \;\; Q$
2. Quelle est la négation de : $P \;\; ou \;\; (non \;\; Q)$?

(a) $(non\ \ P)\ \ ou\ \ Q$

(b) $(non\ \ P)\ \ et\ \ Q$

(c) $(non\ \ P)\ \ et\ \ (non\ \ Q)$

(d) $P\ \ et\ \ (non\ \ Q)$

3. Quelle est la négation de : $\quad (non\ \ P)\ \ ou\ \ (non\ \ Q)$?

   (a) $P\ \ et\ \ Q$

   (b) $P\ \ ou\ \ Q$

   (c) $(non\ \ P)\ \ et\ \ (non\ \ Q)$

Exercice 6. Soit x un réel. Ecrire la négation de
$(x^2 \geq 1 \wedge x^3 < 2) \vee (x^2 \leq 9 \wedge x < 0)$.

Exercice 7. Quelle est la négation de $P \Rightarrow (nonQ)$? Quelle est sa contraposée ? Illustrer avec des propositions mathématiques de votre choix.

Exercice 8. Soient x et y deux réels. L'implication $(x \geq 0 \text{ ET } y \geq 0) \Rightarrow xy \geq 0$ est-elle vraie ? Ecrire sa contraposée C et sa réciproque R. Lesquelles (ou laquelle ?) sont vraies ?

Exercice 9. On dispose de trois jetons de trois formes différentes (Carré, Rond, Triangle), chaque jeton peut être soit Rouge, soit Vert, soit Bleu. On sait que les affirmations suivantes sont vraies :

A0. Les jetons sont tous de couleurs différentes.

A1. Si le jeton rond est bleu, alors le jeton carré est vert.

A2. Si le jeton rond est vert, alors le jeton carré est rouge.

A3. Si le jeton carré n'est pas bleu, alors le jeton triangulaire est vert.

Donner toutes les configurations possibles des jetons (s'il y en a)

Exercice 10. On dispose de 4 cartes, chacune possède sur un côté une lettre, sur l'autre côté un entier. Elles sont posées, les faces visibles sont $A, B, 4$ et 7.

Combien de cartes AU PLUS devez-vous retourner, et lesquelles, pour déterminer de façon certaine si l'implication suivante est vraie pour toutes les cartes :

"La lettre est une voyelle $\Rightarrow$ le nombre est pair".

1.8.2 Quantificateurs

Exercice 11. Écrire les négations logiques des propositions suivantes :

1. $\forall x \in \mathbb{R}, (x > 0 \text{ OU } x < 1)$
2. $\forall x \in \mathbb{R}, x < 1 \Rightarrow x^2 < 1$.
3. $\forall p \in \mathbb{N},\ \forall n \in \mathbb{Z},\ p \geq n$.
4. " Tout intervalle de $\mathbb{R}$ contient au moins un élément de l'intervalle $[0, 1]$."

Exercice 12. Soit E un ensemble et A et B deux parties de E. La définition de $A \subset B$ est "tout élément de A est élément de B". À quelle(s) proposition(s) ci-dessous cela correspond-il ?

- $\forall x \in A, x \in B$
- $\forall x \in E, (x \in B \Rightarrow x \in A)$
- $\forall y \in E, (y \in A \Rightarrow y \in B)$
- $(\forall x \in E, x \in A) \Rightarrow (\forall x \in E, x \in B)$

Quelle est la négation de $A \subset B$?

Exercice 13. Si f est une application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, la définition de "f est bornée" est "$\exists M \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R}, |f(x)| \leq M$". Donner la définition de "f n'est pas bornée".

Quelqu'un propose une définition alternative de "f est bornée" sous la forme :
"$\forall x \in \mathbb{R}, \exists M \in \mathbb{R}, |f(x)| \leq M$". Que pensez-vous de cette nouvelle définition ?
La définition de "f est croissante" est
"$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, x \geq y \Rightarrow f(x) \geq f(y)$". Donner la définition de "f n'est pas croissante". Est-ce la même chose que "f est décroissante" ?

Exercice 14. Soient $P(x)$ et $Q(x)$ deux propositions dépendant d'un paramètre réel x. On suppose qu'on a déterminé que $P(1)$ est vraie et que $Q(\sqrt{2})$ est fausse. Peut-on dire des choses sur les proposition suivantes ?
a) $\forall x \in \mathbb{R}, P(x)$ b) $\exists x \in \mathbb{R}, P(x)$
c) $\forall x \in \mathbb{R}, Q(x)$ d) $\exists x \in \mathbb{R}, Q(x)$

Exercice 15. Pour chacune des propositions suivantes, donner sa négation, et dire si elle est vraie ou fausse (en justifiant la réponse)

1. $\forall x \in \mathbb{R}^*, x^2 > 0$
2. $\forall x \in \mathbb{R}, x^2 > 0$
3. $\exists x \in \mathbb{R}, x^2 > 0$
4. $\forall x \in \mathbb{R}, \sqrt{x^2} = x$
5. $(\forall x \in \mathbb{R})(\exists y \in \mathbb{R})(x + y = 0)$
6. $(\exists y \in \mathbb{R})(\forall x \in \mathbb{R})(x + y = 0)$.

Exercice 16. Soit f une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. A quelle(s) écritures correspondent les propositions :

(P) : f est la fonction nulle.
(Q) : f s'annule sur $\mathbb{R}$.

1. $\exists x \in \mathbb{R}, f(x) = 0$
2. $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = 0$

Ecrire sous la forme d'une proposition avec quantificateurs les énoncés :
(R) : f n'est pas la fonction nulle
(S) : f ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$.

Exercice 17. Écrire sous la forme d'une proposition avec quantificateurs les énoncés suivants :

1. Il existe un réel plus petit que tous les entiers naturels.
2. L'intervalle I est inclus dans $[1,2]$.

1.8.3 Raisonnement par la contraposée

Exercice 18. Écrire les réciproques et les contraposées des implications suivantes :

1. $x \neq y \Rightarrow (x+1)(y-1) \neq (x-1)(y+1)$.
2. $(\forall \varepsilon > 0,\ |f(x)| < \varepsilon) \Rightarrow (f(x) = 0)$

Exercice 19. Soit n un entier. Énoncer et démontrer la contraposée de l'implication suivante :

" Si n^2 est impair, alors n est impair."

A-t-on démontré $\forall n \in \mathbb{N}, n^2$ impair $\Rightarrow n$ impair ?

Exercice 20. *Le but de cet exercice est de démontrer la propriété suivante :*

" pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$, si l'entier $(n^2 - 1)$ n'est pas divisible par 8, alors l'entier n est pair "

1. Écrire la propriété ci-dessus sous la forme d'une proposition mathématique comportant une implication.
2. Écrire la contraposée de l'implication donnée à la question 1).
3. En remarquant qu'un entier impair n s'écrit sous la forme $n = 2k+1$, avec $k \in \mathbb{N}$, prouver que la proposition de la question 2) est vraie.
4. A-t-on démontré la propriété de l'énoncé ?

Exercice 21. Soit $x \in \mathbb{R}$ un réel.

1. Quelle est la contraposée $\mathcal{Q}(x)$ de la proposition

   $\mathcal{P}(x)$: "$x < 0 \Rightarrow x < x^2$ " ?
2. Démontrez $\mathcal{Q}(x)$.

1.8.4 Raisonnement par l'absurde

Exercice 22. Montrer par l'absurde que le polynôme $x^4 - 3x^3 + x^2 - x + \sqrt{3}$ n'admet pas de racine entière.

Exercice 23. *Principe des tiroirs*
Démontrer que lorsque l'on range $(n+1)$ bonnets dans n tiroirs distincts, alors au moins un des tiroirs contient au moins 2 bonnets.

Exercice 24. Soit $n \geq 1$ un entier naturel. On se donne $n+1$ réels $0 \leq x_0 \leq x_1 \leq \cdots \leq x_n \leq 1$. On veut montrer la propriété (P) suivante :

> Au moins deux de ces réels sont distants de moins de $\dfrac{1}{n}$ (moins étant compris au sens large)

1. Faire un dessin avec $n = 3$.
2. Écrire à l'aide de quantificateurs une proposition mathématique portant sur les quantités $x_i - x_{i-1}$ équivalente à la propriété (P).
3. Écrire la négation de cette formule logique.
4. En déduire une démonstration par l'absurde de la propriété (P).

Exercice 25. Sur une île, on trouve deux sortes de personnes : les sincères, qui disent toujours la vérité, et les menteurs, qui mentent toujours.

1. Alice et Bob sont deux habitants de cette île. Alice déclare “L'un d'entre nous deux au moins est un menteur”. Montrer par l'absurde que Alice est sincère. Qu'en est-il de Bob ?
2. Chloé et Denis sont deux autres habitants. Chloé déclare “Je suis menteuse ou Denis est sincère”. Montrer par l'absurde que Chloé est sincère. Qu'en est-il de Denis ?
3. Gaspard, Melchior et Balthazar sont trois habitants. Gaspard déclare : “Nous sommes tous menteurs”. Melchior dit : “Un et un seul d'entre nous est sincère”. Montrer par l'absurde que Gaspard est un menteur, puis que Melchior est sincère. Qu'en est-il de Balthazar ?

Exercice 26. *Le but de cet exercice est de montrer par l'absurde que $\sqrt{2}$ est irrationnel.* Supposons qu'il existe deux entiers naturels tels que $\frac{p}{q} = \sqrt{2}$ et donc que $p^2 = 2q^2$.

1. Montrer qu'on peut supposer que p et q sont premiers entre eux.
2. Montrer que p est pair.
3. En déduire que q est pair.
4. En déduire que p et q n'existent pas.

1.8.5 Raisonnement par récurrence

Exercice 27. On note $n! = \prod_{i=1}^{n} i = 1 \times 2 \times \cdots \times (n-1) \times n$.
Montrer que $\forall n \geq 15$, $\dfrac{3^n}{n!} \leq \left(\dfrac{1}{2}\right)^n$.

Exercice 28. Pour $n \in \mathbb{N}$, on considère la propriété suivante

$$P_n \ : \ 2^n > n^2.$$

1. Montrer que, pour $n \geq 3$, l'implication $P_n \Longrightarrow P_{n+1}$ est vraie.
2. Quels sont les entiers n pour lesquels la propriété P_n est vraie ?

Exercice 29. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*$ on a

$$\sum_{k=1}^{n} (-1)^k k = \frac{(-1)^n(2n+1) - 1}{4}.$$

Exercice 30. Soient P_n la propriété “9 divise $10^n - 1$” et Q_n la propriété “9 divise $10^n + 1$”.

1. Montrer que si n est un entier, $P_n \Rightarrow P_{n+1}$ et $Q_n \Rightarrow Q_{n+1}$ (on pourra utiliser $10^{n+1} = 10^n.(9+1)$)
2. “$\forall n \in \mathbb{N}, P_n$” est-elle vraie ? Et “$\forall n \in \mathbb{N}, Q_n$” ?

1.8.6 Ensembles

Exercice 31.

1. Soient $A = \{2,3,4,5\}$ et $B = \{4,5,6\}$. Déterminer :

$$A \cap B \quad , \quad A \cup B \quad , \quad \complement_{\mathbb{N}} A \quad , \quad \complement_{\mathbb{R}} A \quad , \quad \complement_{\mathbb{N}} B \quad , \quad \complement_{A \cup B} A$$

2. Soient les intervalles (de $\mathbb{R}$) $I = [1,3]$ et $J = [2,4]$. Déterminer :

$$I \cap J \quad , \quad I \cup J \quad , \quad \complement_{\mathbb{R}} I \quad , \quad \complement_{\mathbb{R}} J \quad , \quad \complement_{\mathbb{R}}(I \cup J).$$

Exercice 32. Montrer que si A et B sont deux parties d'un ensemble E, on a

$$A \subset B \Longrightarrow \complement_E B \subset \complement_E A.$$

Exercice 33. Soient A, B, C trois parties d'un ensemble E. On suppose que l'on a les inclusions suivantes : $A \cup B \subset A \cup C$ et $A \cap B \subset A \cap C$. Montrer que l'on a l'inclusion $B \subset C$.

Exercice 34. Peut-on trouver trois parties A, B, C de $\{1,2,3,4,5\}$ telles que $A \cup B = B \cap C$?

Exercice 35. Soient A_1, A_2 et A_3 trois parties d'un ensemble E. Donner une écriture plus simple des parties $\complement_E(\complement_E A_1 \cup (\complement_E A_2 \cap \complement_E A_3))$ et $(A_1 \cap A_2) \cup (A_1 \cap \complement_E A_2)$.

Exercice 36. Décrire en extension les ensembles suivants :

1. $\{n \in \mathbb{N}, n^2 \leq 10\}$
2. $\{n^3 - n, n \in \{0,1,2,3\}\}$

Exercice 37. Décrire l'ensemble $\{2p+1, p \in \mathbb{N}^*\}$. Ecrire d'une manière analogue l'ensemble des entiers multiples de 6.

Exercice 38. Montrer que 0 appartient à $\{n^2 - n, n \in \mathbb{N}\}$

Exercice 39. Soient E un ensemble, A et B deux parties de E définies par :
$A = \{x \in E, P(x) \text{ vraie}\}$ et $B = \{x \in E, Q(x) \text{ vraie }\}$
où P et Q sont deux propositions.
Traduire à l'aide des ensembles A et B les propositions :

1. $\forall x \in E, P(x) \Rightarrow Q(x)$
2. $\exists x \in E, P(x)$ et $Q(x)$
3. $\forall x \in E, P(x)$ ou $Q(x)$
4. (plus dur...) $\exists x \in E.P(x) \Rightarrow Q(x)$

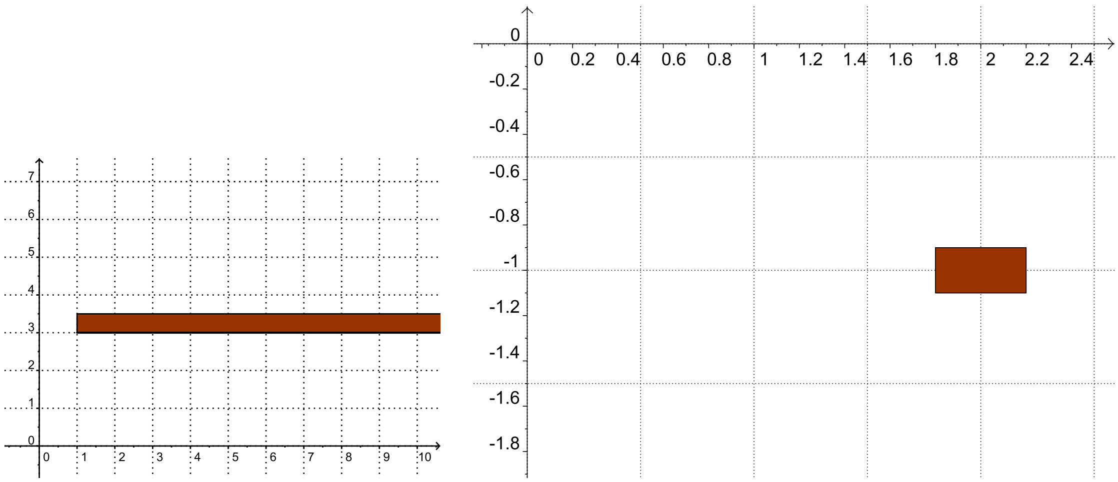
Exercice 40. Le plan étant rapporté à un repère orthonormé, représenter les ensembles suivants :

1. $\{1\} \times \{2,3,4\}$
2. $\{0,2\} \times \{-1,3\}$
3. $\{1\} \times \mathbb{R}$
4. $[0,1] \times [1,2]$
5. $[0,1] \times \mathbb{R}^+$
6. $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^+$
7. $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$
8. $\mathbb{R} \times \mathbb{Z}$

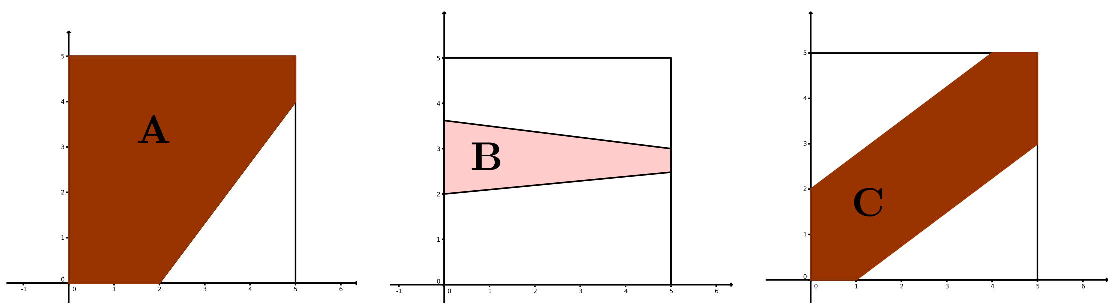
Exercice 41. 1- Représenter graphiquement les ensembles E et F définis par

$$E = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ / \ x \leq -3 \ , \ y \geq 7\} \quad ; \quad F = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ / \ |x+3| \leq 0{,}5 \ , \ y \geq 7\}$$

2- Donner la définition des ensembles G et H dont la représentation graphique est



(a) G (b) H



(a) (b) (c)

Exercice 42. Pour chacun des ensembles colorés ci-dessus indiquez si les propositions suivantes sont vraies ou fausses. On prendra tour à tour $E = A$ puis B puis C.

1. $\forall x \in [0,5],\ \exists y \in [0,5],\ (x,y) \in E,$
2. $\forall y \in [0,5],\ \exists x \in [0,5],\ (x,y) \in E,$
3. $\exists y \in [0,5],\ \forall x \in [0,5],\ (x,y) \in E,$
4. $\exists x \in [0,5],\ \forall y \in [0,5],\ (x,y) \in E.$

Donner la négation de la proposition

$$\forall x \in [2,5],\ \exists y \in [0,5],\ (x,y) \in A.$$

Cette négation est-elle vraie ou fausse ?

1.8.7 Manipulation de sommes

Exercice 43. Ecrire en utilisant le signe $\sum$ les quantités suivantes :

1. $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{100}$
2. $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \ldots - \frac{1}{100}$
3. $1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \ldots + \frac{1}{99}$

Exercice 44. Soient n un entier positif et $(x_1, \ldots, x_n)$ n réels.

1. Si a est un réel quelconque, on considère l'égalité :

   $\sum_{k=1}^{n}(x_k - a)^2 = \sum_{k=1}^{n} {x_k}^2 - 2a\sum_{k=1}^{n} x_k + na^2$.
   Ecrire cette égalité sans le signe $\sum$ pour $n = 1$ et $n = 2$ et la vérifier.
   La démontrer si n est un entier quelconque.

2. On note $m = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} x_k$ la moyenne arithmétique des x_k. Vérifier

   $\sum_{k=1}^{n}(x_k - m)^2 = \sum_{k=1}^{n} {x_k}^2 - nm^2$.

Exercice 45. Simplifier les expressions suivantes :

1. $\sum_{i=1}^{100} i - \sum_{j=0}^{101}(j+1)$
2. $\sum_{i=1}^{n} i^2 - \sum_{j=0}^{n+2}(j+1)^2$
3. $\sum_{i=n}^{2n} i - \sum_{i=n+1}^{2n+2} i$

Exercice 46. Parmi les formules suivantes, lesquelles sont vraies :

a) $\displaystyle\sum_{i=1}^{n}(\alpha + a_i) = \alpha + \sum_{i=1}^{n} a_i$ b) $\displaystyle\sum_{i=1}^{n}(a_i + b_i) = \sum_{i=1}^{n} a_i + \sum_{i=1}^{n} b_i$

c) $\displaystyle\sum_{i=1}^{n}\alpha a_i = \alpha\sum_{i=1}^{n} a_i$ e) $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} a_i^{\alpha} = \left(\sum_{i=1}^{n} a_i\right)^{\alpha}$

1.8.8 Formule du binôme, dénombrement

Exercice 47. Soient E, F, G trois ensembles finis. Exprimer le cardinal de $E \cup F \cup G$ en fonction des cardinaux de $E, F, G, E \cap F, F \cap G, G \cap E$ et $E \cap F \cap G$.

Exercice 48. Soit x un réel et soit f l'application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par $f(x) = (1+x)^n$.

1. Développer $f(x)$.

2. En déduire, en faisant un choix judicieux pour la valeur de x, pour tout entier n, les deux égalités :

$$\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k} = 2^n, \qquad \sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{n}{k} = 0$$

3. Soit E un ensemble de n éléments. Que peut-on déduire des égalités précédentes sur le nombre de parties de E ?

Exercice 49. *

Calcul de $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} k\binom{n}{k}$.

1. Soit $n \geq p \geq 1$. Montrer que

$$p\binom{n}{p} = n\binom{n-1}{p-1}$$

   En déduire la somme $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} k\binom{n}{k}$.

2. Retrouver ce résultat en dérivant $f(x) = (1+x)^n$.

2

Nombres réels, inégalités, valeur absolue

Pour faire simple, les nombres réels permettent de se repérer sur une droite, et de définir la mesure (la longueur) de tout segment de cette droite.

2.1 Rationnels et irrationnels

2.1.1 Les rationnels ne suffisent pas

L'ensemble des rationnels $\mathbb{Q}$ est l'ensemble des fractions

$$\boxed{\mathbb{Q} = \left\{ \frac{a}{b}, \quad a \in \mathbb{Z}, b \in \mathbb{Z}^* \right\}.}$$

Les deux fractions $\frac{a}{b}$ et $\frac{c}{d}$ sont égales si $ad - bc = 0$. On peut toujours trouver un représentant $\frac{a}{b}$ d'un nombre rationnel non nul où a et b sont premiers entre eux.
Cependant cet ensemble $\mathbb{Q}$ est trop petit : d'après le théorème de Pythagore, par exemple, la longueur x de la diagonale d'un carré de côté 1 vérifie $x^2 = 2$. Cependant on démontre par l'absurde qu'un tel réel ne peut pas être rationnel.

Proposition 2.1. *Il n'existe pas de nombre rationnel x tel que $x^2 = 2$*

Démonstration. On procède par l'absurde, comme souvent lorsqu'il s'agit de démontrer que quelque chose n'existe pas.
Supposons qu'un tel rationnel existe. Il s'écrirait donc $\frac{a}{b}$ avec a et b entiers et premiers entre eux.
a et b vérifieraient donc $(\frac{a}{b})^2 = 2$, soit $a^2 = 2b^2$.
a est donc un entier dont le carré est pair : on en déduit que a est pair. Mais alors a est en fait multiple de 4 : en effet, puisque a est pair, il existe un entier k tel que $a = 2k$, donc $a^2 = 4k^2$. On en déduit alors $b^2 = 2k^2$.
b^2 est donc pair, donc b aussi : finalement a et b sont tous les deux pairs, et ils ne peuvent donc pas être premiers entre eux. On a ainsi obtenu une contradiction. $\square$

Point culturel : Nombres algébriques et transcendants

$\sqrt{2}$ n'est bien entendu pas le seul nombre qu'il faut rajouter. On est ainsi conduit à rajouter $\sqrt{3}$, de façon générale toutes les racines des entiers qui ne sont pas des carrés, mais aussi la racine cubique de 2 $\sqrt[3]{2}$, etc. Tous ces nombres ont une particularité : ce sont des racines d'un polynôme à coefficient entier. Ainsi, $\sqrt{2}$ est racine de $X^2 - 2$, $\sqrt{3}$ est racine de $X^2 - 3$, $\sqrt[3]{2}$ est racine de $X^3 - 2$... On dit que ces nombres sont **algébriques**. Mais tous les nombres réels ne sont pas algébriques. On peut montrer que π, par exemple, qui est la demi circonférence d'un cercle de rayon 1, n'est pas algébrique. On dit qu'il est **transcendant**.

2.1.2 Représenter les réels : développement décimal

On peut aussi représenter un rationnel, comme par exemple $\frac{1}{4}$, par son développement décimal 0.25. Une manière d'obtenir ce développement est de poser la division. Sa signification est $\frac{1}{4} = \frac{2}{10} + \frac{5}{10^2}$.

De même, on peut poser la division de $\frac{1}{3}$: la division ne se termine pas, on obtient $\frac{1}{3} = 0.33333... = 0.\overline{3}$ (on note ainsi un développement qui se répète à l'infini). Le développement décimal de $\frac{1}{3}$ est infini. On peut noter de plus en multipliant par 3 que $1 = 0.999999.. = 0.\overline{9}$: le développement décimal d'un nombre n'est pas toujours unique !

Remarque : on peut écrire cela

$$1 = \frac{9}{10} + \frac{9}{100} + \dot{+} \frac{9}{10^k} + \cdots = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{9}{10^k}.$$

Pour donner un sens à cette somme infinie (qu'on appelle **série**), il faut la comprendre comme

$$\lim_{n \to \infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{9}{10^k}.$$

Cette somme est la somme des n premiers termes d'une suite géométrique de raison $\frac{1}{10}$. On a

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{9}{10^k} = \frac{9}{10} \frac{1 - \frac{1}{10^n}}{1 - \frac{1}{10}} = 1 - \frac{1}{10^n}$$

et on verra qu'elle tend vers 1 lorsque n tend vers l'infini.

Point culturel : Périodicité du développement décimal des rationnels

Le développement décimal d'un nombre rationnel finit toujours par se répéter (on dit qu'il est ultimement périodique). Par exemple

$\frac{155}{198} = 0.78282828... = 0.7\overline{82}$. En effet, si on imagine qu'on pose la division, on comprend bien qu'au bout d'un moment ce qu'on fait se répète.

Réciproquement, on peut montrer qu'un développement décimal ultimement périodique correspond à un nombre rationnel. Considérons par exemple

$x = 0.123232323... = 0.1\overline{23}$.

On a $10x = 1.\overline{23} = 1 + 0.\overline{23}$ donc $0.\overline{23} = 10x - 1$, et $1000x = 123.\overline{23} = 123 + (10x - 1)$. Finalement $990x = 122$, donc $x = \frac{122}{990}$ est bien rationnel.

Finalement les nombres réels correspondent à tous les développements décimaux possibles, finis ou infinis, périodiques ou non.

Par exemple, $\sqrt{2}$ a un développement décimal infini, non périodique. On peut trouver successivement ses décimales par dichotomie, en écrivant qu'on doit avoir $\sqrt{2}^2 = 2$. Ainsi, par exemple, on a $1^2 < 2 < 2^2$, puis $1.4^2 < 2 < 1.5^2$. Donc $1.4 < \sqrt{2} < 1.5$. On pourrait continuer ainsi pour avoir la suite du développement.

Point culturel. Suites et nombres rationnels

On peut remarquer que la suite des développements décimaux tronqués d'un nombre irrationnel (par exemple, pour $\sqrt{2}$, la suite $u_0 = 1$, $u_1 = 1.4$, $u_2 = 1.41$,...) est une suite croissante, majorée par 2. Cette suite, formée de nombres tous rationnels, va converger dans $\mathbb{R}$, vers le nombre réel $\sqrt{2}$, mais elle ne converge pas dans $\mathbb{Q}$: rajouter des nombres à $\mathbb{Q}$ va permettre d'avoir le théorème "toute suite de nombres réels majorée converge", qui est faux si on ne dispose que des rationnels.

2.2 Inégalités

Les nombres réels sont ordonnés (ce que ne seront pas les nombres complexes). Rappelons les propriétés que vérifient les relations d'inégalité :

Quels que soient les réels x, y, z, t :

1. $x \leq y$ si et seulement si $y - x \geq 0$ (Pour démontrer une inégalité, on peut donc toujours se ramener à étudier le signe d'une quantité)
2. $(x \leq y$ et $y \leq z) \Rightarrow x \leq z$ (*transitivité*)
3. $(x \leq y$ et $z \leq t) \Rightarrow x + z \leq y + t$
4. Si $a > 0$, $x \leq y \Rightarrow ax \leq ay$
5. Si $a < 0$, $x \leq y \Rightarrow ax \geq ay$
6. On reverra plus tard que si f est une fonction croissante sur un intervalle I, et si x et y sont deux éléments de I, $x \leq y \Rightarrow f(x) \leq f(y)$

Proposition 2.2. *Si x et y sont deux réels* **positifs**, $x \leq y \Rightarrow x^2 \leq y^2$
Si x et y sont deux réels **négatifs**, $x \leq y \Rightarrow y^2 \leq x^2$

Démonstration. On suppose $x \leq y$, c'est-à-dire $y - x \geq 0$. On a $y^2 - x^2 = (y - x)(x + y)$. Donc $y^2 - x^2$ est du signe de $x + y$. Si x et y sont positifs on a donc bien $x \leq y \Rightarrow x^2 \leq y^2$, et si x et y sont négatifs, $x \leq y \Rightarrow y^2 \leq x^2$. □

Proposition 2.3. *Si x et y sont deux réels* **strictement positifs,** $x \leq y \Rightarrow \dfrac{1}{y} \leq \dfrac{1}{x}$

Preuve à faire en exercice.

Rappels de notations : on note par

- $[a, b] = \{x \in \mathbb{R}, a \leq x \leq b\}$.
- $[a, b[= \{x \in \mathbb{R}, a \leq x < b\}$.
- $]a, b] = \{x \in \mathbb{R}, a < x \leq b\}$.
- $]a, b[= \{x \in \mathbb{R}, a < x < b\}$.
- $]-\infty, b] = \{x \in \mathbb{R}, x \leq b\}$.
- $]-\infty, b[= \{x \in \mathbb{R}, x < b\}$.
- $[a, +\infty[= \{x \in \mathbb{R}, x \geq a\}$.
- $]a, +\infty[= \{x \in \mathbb{R}, x > a\}$.

2.3 Valeur absolue

Définition 2.4. *Si x est un réel, sa valeur absolue, notée $|x|$, est*

$$|x| = \begin{cases} x & si \quad x \geq 0 \\ -x & si \quad x \leq 0. \end{cases}$$

• *$|x|$ mesure la* **distance** *du réel x au réel 0.*
En particulier, quel que soit le réel x, $|x|$ est positif (ou nul).
Si x et y sont deux réels, $|x-y|$ mesure la distance entre les réels x et y.

Remarques

Pour tout réel x

- $|x^2| = |x|^2 = x^2$
- $\sqrt{x^2} = |x|$.
- $x \leq |x|$.

Propriétés 2.5. *Pour tous réels x et y,*

1. $|xy| = |x||y|$
2. $|x+y| \leq |x| + |y|$ *(inégalité triangulaire)*
3. $\Big||x| - |y|\Big| \leq |x-y|$.
4. $|x| = 0 \Leftrightarrow x = 0$.
5. *Si $a > 0$, $|x| \leq a \Leftrightarrow -a \leq x \leq a$. En particulier, $\{x \in \mathbb{R}, |x| \leq a\} = [-a, a]$.*

Démonstration. Pour le deuxième point, puisque les deux termes de l'inégalité sont positifs, il suffit de comparer leurs carrés. Or
$|x+y|^2 = (x+y)^2 = x^2 + y^2 + 2xy$ et
$(|x| + |y|)^2 = |x|^2 + |y|^2 + 2|x||y| = x^2 + y^2 + 2|xy|$
Or $xy \leq |xy|$. On en déduit bien que $|x+y| \leq |x| + |y|$. □

2.4 La fonction partie entière

Définition 2.6. *Si x est un réel, la partie entière de x, notée $E(x)$, est l'entier inférieur ou égal à x le plus proche de x. $E(x)$ est donc caractérisé par :*

$$\forall x \in \mathbb{R}, E(x) \in \mathbb{Z} \quad et \quad E(x) \leq x < E(x) + 1$$

Par exemple, $E(1.6) = 1$ et $E(-1.2) = -2$.

Proposition 2.7. *Pour tout entier n et pour tout réel x, $E(x+n) = E(x) + n$.*

Démonstration. Il suffit de remarquer que $E(x) + n$ est bien un entier qui vérifie
$(E(x) + n) \leq x + n < (E(x) + n) + 1$ □

2.5 Exercices

2.5.1 Représentations graphiques

Exercice 50. Représenter sur un plan muni d'un repère orthonormé les ensembles de points dont les coordonnées (x, y) vérifient les inégalités ou systèmes d'inégalités suivantes :

1. $x - y < 1$ et $x \geq 1$
2. $2x + y > 0$ ou $y < 0$
3. $xy < 0$

Exercice 51. Décrire à l'aide d'inégalités les ensembles de points suivants

1. Le quart de plan inférieur droit.
2. L'intérieur du carré de sommets $((0,0);(0,1);(1,0);(1,1))$
3. L'intérieur du triangle de sommets $((0,0);(1,0);(1,1))$

2.5.2 Inéquations

Exercice 52. Déterminer l'ensemble des solutions réelles des inéquations ou inéquations suivantes :

1. $\dfrac{1}{x} \leq x$
2. $(x^2 - 1)^2 > 1.$
3. $\dfrac{2x^2 - x - 6}{x^2 - 4} \geq 0.$

2.5.3 Raisonnements sur les inégalités

Exercice 53.
1. On suppose que $-5 < x < 1$. Quel encadrement peut-on déduire pour x^2 ?
2. On suppose que x et y sont deux réels vérifiant $x \leq 2$ et $y < -1$. Peut-on en déduire une inégalité pour $x + y$? xy ? x^2 ? y^2 ?
3. (Plus difficile) On suppose que x et y sont deux réels vérifiant $-2 \leq x \leq 3$ et $-7 \leq y \leq -5$. Peut-on comparer x et y ? x^2 et y^2 ? Quelle(s) inégalité(s) peut-on obtenir pour $\dfrac{y^2}{y^2 - x^2}$?

Exercice 54. Moyenne arithmétique, géométrique, harmonique

1. Soient x et y deux réels. Montrer $2xy \leq x^2 + y^2$. Peut-on avoir égalité ?
2. Soient a et b deux réels tels que $0 \leq a \leq b$. On pose
   $m = \dfrac{a+b}{2}$ (moyenne arithmétique) et $g = \sqrt{ab}$ (moyenne géométrique). Montrer $a \leq g$, $m \leq b$ et $g \leq m$ (on pourra utiliser la première question), et ordonner a, b, m et g.
3. (plus dur). Si $0 < a \leq b$, on définit la moyenne harmonique h de a et b par $\dfrac{1}{h} = \dfrac{1}{2}(\dfrac{1}{a} + \dfrac{1}{b})$.
   Montrer $a \leq h \leq g \leq m \leq b$.

Exercice 55. Partie entière
Calculer $E(1.5)$, $E(1)$ et $E(-0.5)$.
Montrer les propriétés suivantes :

1. $\forall x \in \mathbb{R}, E(x+1) = E(x) + 1$.
2. Montrer $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, E(x) + E(y) \leq E(x+y)$
3. A-t-on pour tout réel x $E(2x) = 2E(x)$?

2.5.4 Valeur absolue

Exercice 56. Compléter le tableau suivant

valeur absolue	distance	intervalle	encadrement
$\lvert x-3\rvert \leq 1$			
	$d(x;-4) \leq 2$		
			$-2 \leq x \leq 2$
		$x \in]6, 10[$	

Exercice 57. Représenter graphiquement les ensembles de solutions des inéquations suivantes et les écrire à l'aide d'intervalles. Réécrire ces inégalités sous forme d'inégalités ne faisant pas apparaître une valeur absolue.

1. $|x| \leq \frac{1}{10}$
2. $|x-1| \leq 1$
3. $|x+2| \leq 3$
4. $|x+1| \geq \frac{1}{2}$
5. $|x-3| \geq 2$ et $|x-2| \geq 1$.
6. $|x-\pi| \leq \epsilon$ où ϵ est un réel strictement positif fixé.
7. $|x-a| \leq \frac{1}{2}$ où a est un réel fixé.
8. $|2x-3| \leq 2$

Exercice 58. Trouver une inégalité équivalente à chacun de ces encadrements, comportant une valeur absolue.

1. $-2 \leq x \leq 2$
2. $1 < x < 2$
3. $-\epsilon < x < \epsilon$

Exercice 59. Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations et inéquations suivantes :

a) $|x-1| = 5$

b) $|x+3| < 2$

c) $|x+7| \geq 7$

d) $|x+5| \leq -9$

e) $|x - 2\sqrt{3}| > -2\sqrt{3}$

Exercice 60. Déterminer a et r tels que les nombres x satisfaisant l'inégalité $|x+2| > 1$ se trouvent à une distance de a supérieure à r.

Exercice 61. Résoudre les équations et inéquations suivantes :

a) $|x-1| = |3-x| + 2$

b) $|2x-5| = 2|x-4| + 3$

c) $|x+6| \leq |x-10|$

d) $|5-2x| > 2|x+3|$

e) $|x+6| + |x-10| < 16$

f) $|x+6| + |x-10| \geq 15$

Exercice 62. **Inégalité triangulaire** Soient a et b deux réels.

1. A l'aide de l'inégalité triangulaire, comparer $|a|$ et $|b| + |b-a|$.
2. En déduire $|a| - |b| \leq |b-a|$
3. De manière analogue, comparer $|b| - |a|$ et $|b-a|$
4. En déduire $||a| - |b|| \leq |a-b|$, puis $||a| - |b|| \leq |a+b|$.

Exercice 63. Soit x un réel tel que $|x| \leq 2$. On souhaite majorer $\left|\dfrac{x+\sin x}{x-3}\right|$, c'est-à-dire trouver un réel A tel que $\left|\dfrac{x+\sin x}{x-3}\right| \leq A$. Doit-on chercher à majorer ou minorer le numérateur ? Le dénominateur ? Proposer un réel A qui convienne.

3 Systèmes linéaires

3.1 Systèmes linéaires

De nombreux problèmes conduisent à la résolution de systèmes d'équations linéaires à plusieurs inconnues :

- recherche d'un point satisfaisant à des contraintes ;
- problème d'interpolation : recherche d'un polynôme passant par des points donnés ;
- recherche de l'intersection de deux droites, d'une droite et d'un plan, etc.
- décomposition d'une fraction en éléments simples.

Problématique : on a n inconnues $x_1 \dots x_n$ et k équations linéaires dans ces inconnues de la forme

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots a_{1n}x_n & = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots a_{2n}x_n & = b_2 \\ \vdots & \\ a_{k1}x_1 + a_{k2}x_2 + \dots a_{kn}x_n & = b_k \end{cases}$$

Un tel systéme d'équations est appelé un système linéaire $k \times n$ (lignes $\times$ colonnes).

3.1.1 Définitions

Pour étudier l'intersection de droites du plan, ou de plans de l'espace, on est amené à résoudre des "systèmes" du type suivant :

$$\begin{cases} ax & + & by & = & c \\ a'x & + & b'y & = & c' \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \end{cases} \qquad \text{(intersection de droites dans le plan)}$$

ou

$$\begin{cases} ax & + & by & + & cz & = & d \\ a'x & + & b'y & + & c'z & = & d' \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \end{cases} \qquad \text{(intersection de plans dans l'espace).}$$

Les systèmes d'équations qui apparaissent dans la recherche des points d'intersection de droites ou de plans sont un cas particulier de ce qu'on appelle un système d'équations linéaires. De tels systèmes se rencontrent dans une très grande variété de situations.

Définition 3.1. *Un système linéaire à n équations et p inconnues est un système d'équations de la forme :*

$$\left\{\begin{array}{ccccccccc} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \cdots & + & a_{1p}x_p & = & b_1 \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & \cdots & + & a_{2p}x_p & = & b_2 \\ \vdots & & \vdots & & & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1}x_1 & + & a_{n2}x_2 & + & \cdots & + & a_{np}x_p & = & b_n \end{array}\right. \tag{S}$$

*où les coefficients a_{ij} et b_j sont fixés (dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$) et les quantités x_1, x_2, …, x_n sont les **inconnues** du système.*

*La **matrice** du système est obtenue en rangeant les coefficients des équations dans un tableau, comme ci-dessous :*

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1p} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2p} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{np} \end{pmatrix}$$

Résoudre (S) signifie trouver tous les p-uplets $\left(x_1, x_2, \ldots, x_p\right)$ d'éléments de $\mathbb{R}$ (ou de $\mathbb{C}$, selon le contexte) qui vérifient simultanément toutes les équations du système (S).

3.1.2 Système échelonné

Les méthode de substitution, d'élimination de Gauss et de factorisation consistent à remplacer le système initial par un système équivalent "plus simple" que l'on sait résoudre facilement. Par "système équivalent" ,on entend "système ayant le même ensemble de solutions".

Comme le montrent les exemples suivants, un système est "facile" à résoudre dès lors qu'il est **échelonné** (voir définition plus loin).

- Premier exemple (simpliste...) :

$$\left\{\begin{array}{ccccc} x & & & = & 2 \\ & -7y & & = & 5 \\ & & 2z & = & 4 \end{array}\right. \tag{S1}$$

Dans ce cas, le système est immédiatement résolu, et admet pour unique solution le triplet $(2, -5/7, 2)$. C'est le cas particulier, très simple, d'un système *diagonal*.

- Deuxième exemple (à peine plus compliqué...) :

$$\left\{\begin{array}{ccccccc} x & + & y & + & z & = & 2 \\ & & -7y & - & z & = & 5 \\ & & & & 2z & = & 4 \end{array}\right. \tag{S2}$$

À nouveau, en parcourant le système de bas en haut, on trouve d'abord la valeur de z avec la troisième équation, que l'on reporte dans la seconde équation pour trouver y, et on trouve enfin x avec la première équation (on obtient finalement le triplet $(1, -1, 2)$)). À nouveau, c'est la forme très particulière du système (*triangulaire*) qui a permis la résolution. Ce second exemple est très proche de la situation générale : on peut toujours transformer un système linéaire en un système équivalent *échelonné*, c'est-à-dire "presque" triangulaire.

Définition 3.2. *On dit qu'un système linéaire est* échelonné *si sa matrice est* échelonnée selon les lignes, *c'est-à-dire si chaque ligne commence par un nombre de zéros strictement supérieur au nombre de zéros débutant la ligne précédente :*

$$\begin{pmatrix} \oplus & * & * & * & * & * & * & * & * \\ 0 & 0 & \oplus & * & * & * & * & * & * \\ 0 & 0 & 0 & \oplus & * & * & * & * & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \oplus & * & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \oplus \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Exemples : Le système suivant est échelonné

$$\left\{\begin{array}{ccccccccccc} x & + & y & - & z & + & t & + & 3u & = & 1 \\ & & & & z & + & 3t & & & = & 0 \\ & & & & & & t & + & 2u & = & 4 \\ & & & & & & & & u & = & 6 \end{array}\right.$$

mais pas celui-ci

$$\left\{\begin{array}{ccccccccccc} x & + & y & - & z & + & t & + & 3u & = & 1 \\ & & & & z & + & 3t & + & 5u & = & 0 \\ & & 2y & + & 3z & + & t & - & u & = & 2 \\ & & & & & & t & + & u & = & 5 \end{array}\right.$$

... ni celui-là

$$\left\{\begin{array}{ccccccccccc} x & + & y & - & z & + & t & + & 3u & = & 1 \\ & & & & z & + & 3t & + & 5u & = & 0 \\ & & & & 2z & + & t & + & 2u & = & 4 \\ & & & & & & t & + & u & = & 5 \end{array}\right. .$$

3.1.3 Réduction à un système échelonné

On décrit ci-dessous une liste de "manipulations licites" sur un système d'équations linéaires, au sens où elles transforment le système en un système équivalent, c'est-à-dire ne modifient pas l'ensemble des solutions. Les équations du systèmes sont notées $\mathbf{L_1}, \mathbf{L_2}, \ldots, \mathbf{L_n}$.

$$\left\{\begin{array}{ccccccccc} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \cdots & + & a_{1p}x_p & = & b_1 \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & \cdots & + & a_{2p}x_p & = & b_2 \\ \vdots & & \vdots & & & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1}x_1 & + & a_{n2}x_2 & + & \cdots & + & a_{np}x_p & = & b_n \end{array}\right. \quad \begin{array}{c} (\mathbf{L_1}) \\ (\mathbf{L_2}) \\ \\ (\mathbf{L_n}) \end{array}$$

Opérations licites pour la méthode de substitution :

1. Permuter les équations : $\mathbf{L}_i \longleftrightarrow \mathbf{L}_j$.
2. Permuter des variables.
3. Multiplier une équation par une constante α *non nulle* : $\mathbf{L}_i \to \alpha\mathbf{L}_i$.
4. Ajouter une équation à une autre $\mathbf{L}_i \to \mathbf{L}_i + \mathbf{L}_j$.
   On peut également combiner les opérations 3 et 4, c'est-à-dire
5. ajouter à une équation une combinaison linéaire des autres : $\mathbf{L}_i \to \mathbf{L}_i + \sum_{j \neq i} \alpha_j \mathbf{L}_j$.

   ou même

6. remplacer l'équation L_i par une combinaison linéaire des autres équations, *y compris* L_i, à condition que le coefficient α_i de L_i soit *non nul* :

$$\mathbf{L_i} \to \alpha_i \mathbf{L_i} + \sum_{j \neq i} \alpha_j \mathbf{L_j} \text{ avec } \alpha_i \neq 0.$$

On peut montrer que tout système d'équations linéaires peut-être transformé en un système échelonné équivalent par une succession d'opérations de l'un des types précédents. On va mettre en oeuvre cette méthode sur trois exemples qui illustrent les trois cas de figures qui se présentent lorsque l'on cherche à résoudre un système.

Exemple 1

Pour déterminer l'intersection, dans $\mathbb{R}^3$, des trois plans d'équations respectives $x + 2y - z = 1$, $2x + y - z = 5$ et $x - z = 5$, on résout le système :

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcl} x & + & 2y & - & z & = & 1\\ 2x & + & y & - & z & = & 5\\ x & & & - & z & = & 5\end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcrcrcl} x & - & & + & 2y & = & 1\\ & & -3y & + & z & = & 3\\ & & -2y & & & = & 4\end{array}\right. \begin{array}{l} \\ L_2 \to L_2 - 2L_1 \\ L_3 \to L_3 - L_1\end{array}$$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcrcrcl} x & + & 2y & - & z & = & 1\\ & & z & - & 3y & = & 3\\ & & & & -2y & = & 4\end{array}\right. \begin{array}{l} \\ y \leftrightarrow z\ . \\ \\ \end{array}$$

Le système est échelonné, et on peut le résoudre facilement en "remontant" depuis la troisième équation : on trouve $y = -2$, $z = -3$ et $x = 1$. Les trois plans s'intersectent donc au point de coordonnées $(2, -2, -3)$.

Exemple 2

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcl} x & + & 2y & - & 2z & = & 2\\ 2x & + & 4y & - & 3z & = & 5\\ 5x & + & 10y & - & 8z & = & 12\end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcrcrcl} x & + & 2y & - & 2z & = & 2\\ & & & & z & = & 1\\ & & & & 2z & = & 2\end{array}\right. \begin{array}{l} \\ L_2 \to L_2 - 2L_1 \\ L_3 \to L_3 - 5L_1\end{array}$$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcrcrcl} x & + & 2y & - & 2z & = & 2\\ & & & & z & = & 1\\ & & & & 0 & = & 0\end{array}\right. \begin{array}{l} \\ \\ L_3 \to L_3 - 2L_2\end{array}$$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcrcrcl} x & + & 2y & - & 2z & = & 2\\ & & & & z & = & 1\end{array}\right.$$

Le système est échelonné et possède une infinité de solutions, à savoir tous les triplets de la forme $(4 - 2y, y, 1)$, où y parcourt $\mathbb{R}$. Géométriquement, c'est la droite passant par le point de coordonnées $(4, 0, 1)$ et dirigée par le vecteur $(-2, 1, 0)$.

Exemple 3

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcrcl} 2x & + & y & - & 2z & + & 3w & = & 1\\ 3x & + & 2y & - & z & + & 2w & = & 4\\ 3x & + & 3y & + & 3z & - & 3w & = & 5\end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcrcrcrcl} 2x & + & y & - & 2z & + & 3w & = & 1\\ & & y & + & 4z & - & 5w & = & 5\\ & & 3y & + & 12z & - & 15w & = & 7\end{array}\right. \begin{array}{l} \\ L_2 \to 2L_2 - 3L_1 \\ L_2 \to 2L_3 - 3L_1\end{array}$$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcrcrcrcl} 2x & + & y & - & 2z & + & 3w & = & 1\\ & & y & + & 4z & - & 5w & = & 5\\ & & & & & & 0 & = & -8\end{array}\right. \begin{array}{l} \\ \\ L_2 \to L_3 - 3L_2\end{array}$$

Le système est échelonné, mais il n'a aucune solution, à cause de la dernière équation.

Exemple 4

$$
\begin{cases}
x_1 + x_2 = 2 \\
x_2 + x_3 = 2 \\
x_3 + x_4 = 2 \\
x_2 + x_4 = 2
\end{cases}
\Leftrightarrow
\begin{cases}
x_1 + x_2 = 2 \\
x_2 + x_3 = 2 \\
x_3 + x_4 = 2 \\
-x_3 + x_4 = 0 & L_4 \leftarrow L_4 - L_2
\end{cases}
\Leftrightarrow
\begin{cases}
x_1 + x_2 = 2 \\
x_2 + x_3 = 2 \\
x_3 + x_4 = 2 \\
2x_4 = 2 & L_4 \leftarrow L_4 + L_3
\end{cases}
$$

À nouveau, le système est échelonné, et on peut le résoudre facilement en "remontant" depuis la quatrième équation : on trouve d'abord $x_4 = 1$ grâce à la dernière équation, , puis $x_3 = 1$ en reportant la valeur de x_4 dans la troisième équation et ainsi de suite. Le quadruplet $(1, 1, 1, 1)$ est donc l'unique solution du système considéré.

3.1.4 Système homogène associé à un système linéaire (complément)

À tout système linéaire

$$
\begin{cases}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1p}x_p = b_1 \\
a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2p}x_p = b_2 \\
\vdots \\
a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{np}x_p = b_n
\end{cases}
\tag{S}
$$

on associe un système homogène (dit " système homogène associé") :

$$
\begin{cases}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1p}x_p = 0 \\
a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2p}x_p = 0 \\
\vdots \\
a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{np}x_p = 0
\end{cases}
\tag{H}
$$

obtenu en égalant les seconds membres à 0. Remarquons que l'ensemble des solutions de ce système homogène associé n'est **jamais vide** (il contient le vecteur nul), alors que le système initial peut, lui, ne pas avoir de solutions. Les solutions de (H) et (S) sont liées par le principe de "superposition" suivant :

Proposition 3.3. *L'ensemble des solutions de (S), **s'il est non vide**, s'obtient en ajoutant à une solution particulière de (S) la solution générale de (H).*

3.2 Droites et plans de l'espace

Dans ce chapitre, on suppose connues toutes les notions liées aux points et vecteurs du plan et de l'espace vues au lycée. Traditionnellement, les points du plan sont repérés par leurs coordonnées dans un repère fixé $(O, \vec{i}, \vec{j})$. Pour un point M, on écrit par exemple

$$M(x, y) \text{ ou } M \left| \begin{matrix} x \\ y \end{matrix} \right. \text{ ou bien } M \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

On a les mêmes conventions d'écriture pour les coordonnées d'un vecteur, en rappelant que si $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$, alors ses coordonnées (x, y) sont liées à celles de A et B par les relations $x = x_B - x_A$ et $y = y_B - y_A$. Toutes ces conventions s'appliquent évidemment également dans l'espace, rapporté à un repère fixé $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. Dans la pratique, le repère de référence est choisi orthonormé, ce qui est plus adapté aux calculs de normes et de produits scalaires (voir sections suivantes).

Un repère de référence étant fixé, on peut identifier l'ensemble $\mathbb{R}^2$ (resp. $\mathbb{R}^3$) des couples (resp. triplets) de nombres réels à l'ensemble des vecteurs du plan (resp. de l'espace). Précisément on identifie le couple (x, y) de $\mathbb{R}^2$ au vecteur $\vec{u} = \overrightarrow{OM}$, où M est le point de coordonnées (x, y) dans le repère considéré (voir figure 3.1 ci-dessous). Nous faisons systématiquement cette identification dans la suite du chapitre.

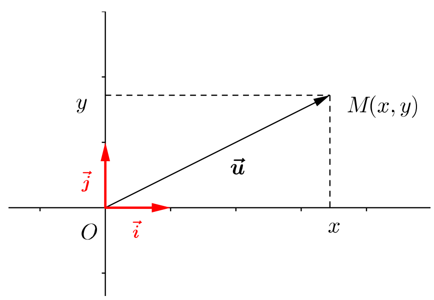


FIGURE 3.1

3.2.1 Bases de $\mathbb{R}^2$ et $\mathbb{R}^3$

Deux vecteurs $\vec{v}_1$ et $\vec{v}_2$ du plan forment une *base* de $\mathbb{R}^2$ si tout vecteur $\vec{u}$ du plan *peut s'écrire de façon unique comme combinaison linéaire* de $\vec{v}_1$ et $\vec{v}_2$, c'est-à-dire s'il existe des réels uniques λ_1 et λ_2 tels que

$$\vec{u} = \lambda_1 \vec{v}_1 + \lambda_2 \vec{v}_2.$$

Les scalaires λ_1 et λ_2 s'appellent les *coordonnées* de $\vec{u}$ sur la base $(\vec{v}_1, \vec{v}_2)$.

De la même façon, trois vecteurs $\vec{v}_1$, $\vec{v}_2$ et $\vec{v}_3$ de l'espace forment une base de $\mathbb{R}^3$ si tout vecteur $\vec{u}$ de l'espace peut s'écrire de façon unique sous la forme $\vec{u} = \lambda_1 \vec{v}_1 + \lambda_2 \vec{v}_2 + \lambda_3 \vec{v}_3$.

Au lycée, on montre, par des arguments géométriques, que 2 vecteurs non colinéaires de $\mathbb{R}^2$ constituent une base de $\mathbb{R}^2$ et que 3 vecteurs non coplanaires de $\mathbb{R}^3$ constituent une base de $\mathbb{R}^3$.

Par exemple, les vecteurs $\vec{i} = (1, 0)$ et $\vec{j} = (0, 1)$ constituent une base de $\mathbb{R}^2$, qu'on appelle la *base canonique*. Les coordonnées du vecteur $\vec{u} = (x, y)$ dans cette base sont précisément les réels x et y. Mais il existe bien d'autres bases du plan (une infinité). Par exemple, les vecteurs $\vec{v}_1 = (1, 1)$ et $\vec{v}_2 = (1, -1)$ sont non colinéaires et constituent donc une autre base.

Les coordonnées du vecteur $\vec{u} = (x, y)$ dans cette nouvelle base sont les scalaires λ_1 et λ_2 tels que

$$(x, y) = \lambda_1(1, 1) + \lambda_2(1, -1),$$

que l'on calcule en résolvant le système

$$\begin{cases} \lambda_1 + \lambda_2 = x \\ \lambda_1 - \lambda_2 = y, \end{cases}$$

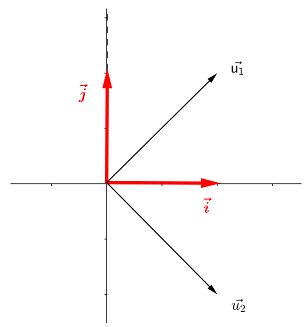


FIGURE 3.2

soit $\lambda_1 = \dfrac{x+y}{2}$ et $\lambda_2 = \dfrac{x-y}{2}$.

3.2.2 Produit scalaire

Dans $\mathbb{R}^2$ la norme d'un vecteur $\vec{u} = (x, y)$ est le réel

$$\|\vec{u}\| = \sqrt{x^2 + y^2}. \tag{3.1}$$

En vertu du théorème de Pythagore, cette quantité représente donc la longueur d'un représentant du vecteur $\vec{u}$ (voir la figure 3.1 ci-dessus).

Toujours en vertu du théorème de Pythagore, il est naturel de définir le produit scalaire de deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ par la formule

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \frac{1}{2}\left(\|u+v\|^2 - \|u\|^2 - \|v\|^2\right)$$

qui vaut 0 si et seulement si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux (mesure du "défaut d'orthogonalité"). Grâce à (3.1), on obtient pour le produit scalaire des vecteurs $\vec{u} = (x, y)$ et $\vec{v} = (x', y')$, l'expression

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = xx' + yy'. \tag{3.2}$$

Ceci se généralise évidemment à $\mathbb{R}^3$, où l'on a les formules

$$\|\vec{u}\| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \tag{3.3}$$
$$\vec{u} \cdot \vec{v} = xx' + yy' + zz' \tag{3.4}$$

pour $\vec{u} = (x, y, z)$ et $\vec{v} = (x', y', z')$.

Une base de $\mathbb{R}^2$, resp. $\mathbb{R}^3$ est *orthonormée* si elle est constituée de vecteurs de norme 1 deux à deux orthogonaux.

On peut alors observer, et c'est une remarque fondamentale, que les formules (3.1) et (3.2) (resp. (3.3) et (3.4)) sont *valables dans n'importe quelle base orthonormée* (elles reposent sur le théorème de Pythagore, dont la validité ne dépend pas du choix d'une base orthonormée). Si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont deux vecteurs du plan, avec $\vec{u}$ non nul, on peut choisir pour nouvelle base orthonormée du plan la base constituée des vecteurs $\vec{i_1} = \dfrac{\vec{u}}{\|\vec{u}\|}$ et d'un vecteur unitaire $\vec{j_1}$ directement[1] orthogonal au précédent (voir figure 3.3 ci dessous).

1. On se réfère ici au choix d'une *orientation du plan*, en l'occurrence celle correspondant au repère de référence $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

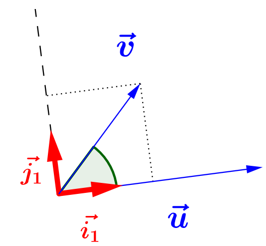


FIGURE 3.3

Dans cette nouvelle base, on a, en notant θ une mesure de l'angle $(\vec{u}, \vec{v})$,

$$\begin{aligned}\vec{u} &= \|\vec{u}\|\vec{i_1} + 0\vec{j_1} = \|\vec{u}\|\vec{i_1} \\ \vec{v} &= \|\vec{v}\|\cos\theta\vec{i_1} + \|\vec{v}\|\sin\theta\vec{j_1}\end{aligned}$$

Par conséquent, la formule (3.2), calculée dans cette base, fournit la relation

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\|\|\vec{v}\|\cos\theta \tag{3.5}$$

qui est une autre expression bien connue pour le produit scalaire de deux vecteurs.

3.2.3 Droites et plans de l'espace

Toute droite $\mathcal{D}$ du plan admet, dans un repère donné, une équation de la forme

$$ax + by = c \tag{3.6}$$

où a, b et c sont des réels avec $(a, b) \neq (0, 0)$. Le vecteur de composantes $(-b, a)$ est un ***vecteur directeur*** de $\mathcal{D}$. Inversement, toute équation du type (3.6) caractérise une droite du plan. Si le repère dans lequel on s'est placé est orthonormé, la droite d'équation (3.6) a pour ***vecteur normal*** le vecteur (a, b).

Rappelons que si $A(x_A, y_A, z_A)$ est un point et $\overrightarrow{u}(a, b, c)$ un vecteur non nul alors la droite $\mathscr{D}$ passant par A de vecteur directeur $\overrightarrow{u}$ est l'ensemble des points M de l'espace tel qu'il existe un réel t tel que $\overrightarrow{AM} = t\overrightarrow{u}$. La droite $\mathscr{D}$ peut être représentée par un système paramétrique :

Un point $M(x, y, z)$ appartient à la droite $\mathscr{D}$ passant par A et de vecteur directeur $\overrightarrow{u}$ si, et seulement si, il existe un réel t tel que

$$\left\{\begin{array}{lcl} x &=& x_A + at \\ y &=& y_A + bt \\ z &=& z_A + ct \end{array}\right.$$

Rappelons aussi que si $\mathscr{P}$ est le plan passant par $A(x_A, y_A, z_A)$ de vecteurs directeurs $\overrightarrow{u}(a, b, c)$ et $\overrightarrow{v}(a', b', c')$ deux vecteurs non colinéaires, alors un point M appartient au plan $\mathscr{P}$ si, et seulement si, il existe λ et μ tels que $\overrightarrow{AM} = \lambda\overrightarrow{u} + \mu\overrightarrow{v}$.

Un point $M(x, y, z) \in \mathscr{P}$ si et seulement si il existe deux réels λ et μ tels que

$$\left\{\begin{array}{lcl} x &=& x_A + \lambda a + \mu a' \\ y &=& y_A + \lambda b + \mu b' \\ z &=& z_A + \lambda c + \mu c' \end{array}\right.$$

Rappelons également qu'un plan est entièrement déterminé par la donnée d'un point et d'un vecteur normal au plan.

Proposition 3.4. *Soit $\mathscr{P}$ le plan passant par $A(x_A, y_A, z_A)$ de vecteur normal $\overrightarrow{n}(a, b, c)$.*
Un point M appartient au plan $\mathscr{P}$ si et seulement si, $\overrightarrow{AM} \perp \overrightarrow{n}$ c'est-à -dire $\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{n} = 0$.

En passant au coordonnées dans un repére orthonormé, on obtient une équation cartésienne du plan $\mathscr{P}$:

Un point $M(x, y, z) \in \mathscr{P}$ si et seulement si il existe $\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{n} = 0$ soit

$$a(x - x_A) + b(y - y_A) + c(z - z_A) = 0$$

ou encore

$$ax + by + cz = d \tag{3.7}$$

où a, b, c et d sont des réels avec $(a, b, c) \neq (0, 0, 0)$. Inversement, toute équation du type (3.7) caractérise un plan de l'espace, de ***vecteur normal*** (a, b, c) si le repère est orthonormé.

⚠ Il n'y a pas de notion de "vecteur directeur" pour un plan : la direction d'un plan est caractérisée par un *couple de vecteurs non colinéaires*. La relation entre un tel couple et un vecteur normal est explicitée dans la proposition ci-dessous, très utile en pratique.

Définition 3.5. *Soient (a, b) et (c, d) deux couples de réels. Leur* déterminant *est le nombre réel* $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc.$

Proposition 3.6. *Dans l'espace $\mathbb{R}^3$ rapporté à un repère orthonormé, si $\mathcal{P}$ est un plan dont la direction contient deux vecteurs **non colinéaires** $\vec{u} = (a, b, c)$ et $\vec{v} = (a', b', c')$, alors il admet pour vecteur normal le vecteur* $\vec{n} = \left(\begin{vmatrix} b & b' \\ c & c' \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} c & c' \\ a & a' \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} a & a' \\ b & b' \end{vmatrix} \right).$

3.3 Exercices

3.3.1 Systèmes

Exercice 64. Résoudre les trois système suivants :

$$\begin{cases} 3x + 5y &= 11 \\ 2x + 3y &= 7 \end{cases} \qquad \begin{cases} 2x + 5y &= 10 \\ 2x + 3y &= 8 \end{cases} \qquad \begin{cases} 6x + 12y &= 30 \\ 3x + 3y &= 9 \end{cases}$$

Exercice 65. Un groupe de pirates fête ses dix ans d'existence avec quelques vikings de la région. Chaque pirate mange pendant la soirée 4 poulets et boit 5 litres de bière. Les vikings ne mangent que 3 poulets, mais boivent 7 litres de bière. En totalité, 65 poulets et 117 bières ont été consommés. Combien de pirates et de vikings étaient présents ?

Exercice 66. Dans une ferme on élève des lapins et des poulets. Il y a au total 27 animaux, et 72 pattes d'animaux. Combien de lapins et combien de poulets sont dans la ferme ?

Exercice 67. La course de montagne dure 6h. A l'aller, on monte à 3 km/h. Puis, au retour on descend à 5 km/h. La course commence à 8h du matin. A quelle heure est-on au sommet ?

Exercice 68. Résoudre

$$\begin{cases} -5x & -y & +2z & = & -20 \\ -2x & +6y & +2z & = & 2 \\ 4x & +2y & -8z & = & -2 \end{cases} \qquad \begin{cases} -9x & +9y & +6z & = & 114 \\ 4x & & -7z & = & -91 \\ -x & & -2z & = & -26 \end{cases}$$

Exercice 69. Résoudre

$$\left\{\begin{array}{rrrcr} x & -3y & +2z & = & 8 \\ -x & +3y & -4z & = & -16 \end{array}\right. \qquad \left\{\begin{array}{rrrcr} 6x & +3y & +1 & = & 10 \\ 6x & +3y & +3 & = & 12 \end{array}\right.$$

Exercice 70. Résoudre en fonction d'un paramétre $t \in \mathbb{R}$

$$\left\{\begin{array}{rcl} 1x+2y & = & t^2 \\ 4x+3y & = & 1 \end{array}\right. \qquad \left\{\begin{array}{rcl} 2tx+9y & = & 21 \\ 8x+ty & = & 14 \end{array}\right. \qquad \left\{\begin{array}{rrcl} 2x & -(t-1)y & = & 4 \\ (t+2)x & +(2t+1)y & = & t-1 \end{array}\right.$$

$$\left\{\begin{array}{rrrcl} 3x & +y & -z & = & 3 \\ 2x & -3y & +2z & = & 3 \\ x & +4y & +tz & = & 0 \end{array}\right. \qquad \left\{\begin{array}{rrrcl} 7x & -3y & +tz & = & 29 \\ 70x & +2y & +5z & = & t \\ 19x & +y & +16z & = & 41 \end{array}\right. \qquad \left\{\begin{array}{rrrcl} x & +y & & = & 2t \\ -x & +2y & +z & = & 4 \\ 4x & +y & -z & = & 2 \end{array}\right.$$

Exercice 71. Discuter l'existence de solutions de

$$\left\{\begin{array}{rrcr} 2x & +3y & = & 4 \\ 3x & +7y & = & 0 \\ 4x & +y & = & 1 \end{array}\right. \qquad \left\{\begin{array}{rrcr} 2x & +3y & = & 4 \\ 3x & +7y & = & 0 \\ 4x & +y & = & 20 \end{array}\right. \qquad \left\{\begin{array}{rrcr} 2x & +3y & = & 4 \\ 3x & +7y & = & 0 \\ 4x & +3y & = & 20 \end{array}\right. \qquad \left\{\begin{array}{rrcr} 2x & +3y & = & 0 \\ 3x & +7y & = & 0 \\ 4x & +3y & = & 0 \end{array}\right.$$

Exercice 72. Si $\mathcal{D} : ax + by = c$ et $\mathcal{D}' : a'x + b'y = c'$ sont deux droites de $\mathbb{R}^2$ *non parallèles*, montrer qu'elles s'intersectent au point de coordonnées

$$x = \frac{\Delta_x}{\Delta}, \quad y = \frac{\Delta_y}{\Delta}$$

où

$$\Delta = \begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix}, \quad \Delta_x = \begin{vmatrix} c & b \\ c' & b' \end{vmatrix} \quad \text{et} \quad \Delta_y = \begin{vmatrix} a & c \\ a' & c' \end{vmatrix}.$$

Exercice 73. Soit le système

$$(S) \quad \left\{\begin{array}{l} x - y = 0 \\ y - z = 1 \\ z - x = 0 \end{array}\right.$$

On effectue les transformations $L_1 + L_2$, $L_1 + L_3$ $L_2 - L_3$ et on obtient

$$(S') \quad \left\{\begin{array}{l} x - z = 1 \\ z - y = 0 \\ x + y - 2z = 1 \end{array}\right.$$

Le système (S) est sans solution alors que $(1, 0, 0)$ est solution du système (S') ... Cherchez l'erreur et résoudre (S').

Exercice 74. Résoudre en fonction des réels a, b et c fixés le système

$$(\mathcal{S}) \left\{\begin{array}{l} 3x - 2y - z = a \\ 2x - 5y - 2z = b \\ -5x - y + 2z = c \end{array}\right.$$

Si on considère dans l'espace supposé muni d'un repère, les vecteurs

$$\overrightarrow{u}(3, 2, -5) \quad \overrightarrow{v}(-2, -5, -1) \quad \overrightarrow{w}(-1, -2, 2)$$

que peut-on déduire sur ces vecteurs à partir de la résolution du sytème $(\mathcal{S})$?

Exercice 75. Justifier que les deux systèmes ci-dessous définissent deux droites de $\mathbb{R}^3$

$$\left\{\begin{array}{l} x + 2y + 2z = 2 \\ 3x - 2y - z = 5 \end{array}\right. \qquad \left\{\begin{array}{l} 2x - 5y + 3z = -4 \\ x + 4y + 6z = 0 \end{array}\right.$$

Ces droites sont-elles sécantes ?

Exercice 76. On reprend le sytème

$$(\mathcal{S})\ \left\{\begin{array}{l} x+2y+2z=2 \\ 3x-2y-z=5 \end{array}\right.$$

Une solution « à vue » de $(\mathcal{S})$ est $(0,-6,7)$, montrer que les solutions de $(\mathcal{S})$ sont les triplets $(a,-6+b,7+c)$ avec (a,b,c) solution de

$$(\mathcal{S}_0)\ \left\{\begin{array}{l} x+2y+2z=0 \\ 3x-2y-z=0 \end{array}\right.$$

Exercice 77. Résoudre dans $\mathbb{R}^4$ les systèmes suivants :

$$\text{a)}\ \left\{\begin{array}{l} 2x-y-z-t=-1 \\ x-3y+z+t=-2 \\ x+y-2z+4t=4 \\ x-y+z-2t=-8 \end{array}\right. \qquad \text{b)}\ \left\{\begin{array}{l} 2x+3y-2z=1 \\ x-2y+3z=-1 \\ 4x-y+4z=3 \end{array}\right.$$

Exercice 78. Résoudre le système suivant :

$$\left\{\begin{array}{lcl} a-b+c & = & -6 \\ a+b+c & = & -2 \\ 4a+2b+c & = & -3 \end{array}\right.$$

Déterminer l'ensemble des fonctions polynomiales $P(x)=ax^2+bx+c$ qui vérifient $P(-1)=-6$, $P(1)=-2$ et $P(2)=-3$

Exercice 79. Déterminer l'ensemble de fonctions polynomiales P de degré 2 qui vérifient $P(-1)=19$, $P(1)=2$ et $P(2)=4$.

Exercice 80. Soit

$$F(x)=\frac{x+1}{x^2-3x+2}$$

On admet (et on ne demande pas de le démontrer) qu'il existe deux réels a et b tels que pour tout $x\neq 1$ et $x\neq 2$ on a

$$F(x)=\frac{a}{x-1}+\frac{b}{x-2}$$

En calculant $F(0)$ et $F(-1)$, montrer que (a,b) est solution de

$$\left\{\begin{array}{lcl} 2a+b & = & -1 \\ 3a+2b & = & 0 \end{array}\right.$$

et résoudre le système ci-dessus.

Exercice 81. Soit

$$F(x)=\frac{3x^2-3x+2}{x^3-x^2+x-1}$$

En calculant $F(0)$ et $F(-1)$, trouver a et b tel que pour tout $x\neq 1$ on a

$$F(x)=\frac{1}{x-1}+\frac{ax+b}{x^2+1}$$

Exercice 82. Soit

$$F(x)=\frac{3x^2+2x+1}{x^3-1}$$

On admet qu'il existe trois réels a, b et c tels que pour tout $x \neq 1$ on a

$$F(x) = \frac{ax+b}{x^2+x+1} + \frac{c}{x-1}.$$

En calculant $F(-2)$ et $F(-1)$ et $F(0)$ montrer que (a, b, c) est solution de

$$\begin{cases} 2a - b + c &= 3 \\ 2a - 2b + c &= 2 \\ b - c &= -1. \end{cases}$$

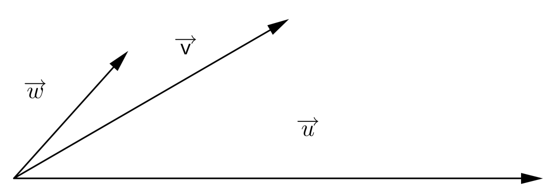
Résoudre le système ci-dessus en indiquant les transformations utilisées à chaque étape.

3.3.2 Calcul vectoriel

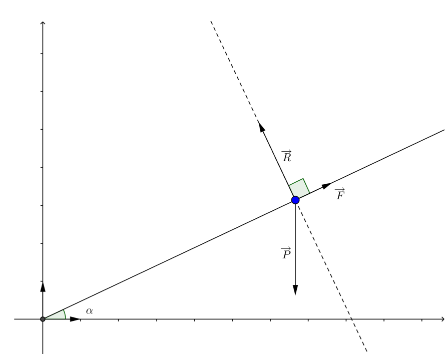
Exercice 83. Soient A, B et C trois points non alignés du plan. Représenter sans avoir recours aux coordonnées les vecteurs $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}$.

Exercice 84. Une seule des relations suivantes est correcte, laquelle ?

a) $\overrightarrow{w} = -0,2\overrightarrow{u} + 0,8\overrightarrow{v}$, b) $\overrightarrow{w} = -0,2\overrightarrow{u} - 0,8\overrightarrow{v}$, c) $\overrightarrow{w} = 0,2\overrightarrow{u} + 0,8\overrightarrow{v}$, d) $\overrightarrow{w} = 0,2\overrightarrow{u} - 0,8\overrightarrow{v}$.



Exercice 85. Dans le schéma ci-dessous $\overrightarrow{P}$ représente le poids, $\overrightarrow{R}$ la réaction du plan incliné et $\overrightarrow{F}$ la force exercée pour être en équilibre ce qui signifie $\overrightarrow{P} + \overrightarrow{R} + \overrightarrow{F} = \overrightarrow{0}$. Le repère est supposé orthonormé et $\overrightarrow{P}$ est dirigé verticalement vers le bas. Déterminer les coordonnées de $\overrightarrow{R}$ et $\overrightarrow{F}$



en fonction de $\|\overrightarrow{P}\|$ et de α une mesure (en radians) de l'angle fait avec l'horizontale par le plan incliné.

Exercice 86. On suppose le plan muni d'un repère orthonormé. Soient $\overrightarrow{u}$ de coordonnées $(2, 1)$, $\overrightarrow{v}$ de coordonnées $(-3, 6)$ et $\overrightarrow{w}$ de coordonnées $(8, -\frac{25}{2})$ dans ce repère. Justifier que $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$ est une base du plan et trouver, en utilisant au moins deux méthodes différentes, les coordonnées de $\overrightarrow{w}$ dans cette base.

Exercice 87. Soient trois vecteurs de l'espace

$$\overrightarrow{u}(7, 10, -9) \quad \overrightarrow{v}(5, 6, -5) \quad \overrightarrow{w}(1, -2, 3)$$

Ces trois vecteurs forment-ils une base de l'espace ?

Exercice 88. Le plan est muni d'un repère orthonormé. Soient $M(a, b)$ un point du plan et Δ la droite d'équation $\frac{x}{2} + \frac{y}{5} = 1$.

Soit H le projeté orthogonal de M sur Δ c'est-à-dire, H est le point d'intersection de Δ et de la perpendiculaire à Δ passant par M.

1. Faire une représentation graphique.
2. On prend $M = O$ l'origine du repère, calculer les coordonnées de H.
3. M est maintenant un point quelconque. Déterminer en fonction de a et b les coordonnées du projeté orthogonal H de M sur Δ.

Exercice 89. Un plan $\mathcal{P}$ de l'espace passe par le point P de coordonnées $(-1, 0, 0)$ et est dirigé par les vecteurs $\overrightarrow{u}(1, 2, 1)$ et $\overrightarrow{v}(0, 1, 0)$

1. Donner le vecteur normal $\overrightarrow{n}$ au plan $\mathcal{P}$.
2. Calculer $\overrightarrow{OP}.\overrightarrow{n}$.
3. Determiner a, b, c, d tels que $\mathcal{P}$ est défini par l'équation $ax + by + cz = d$.

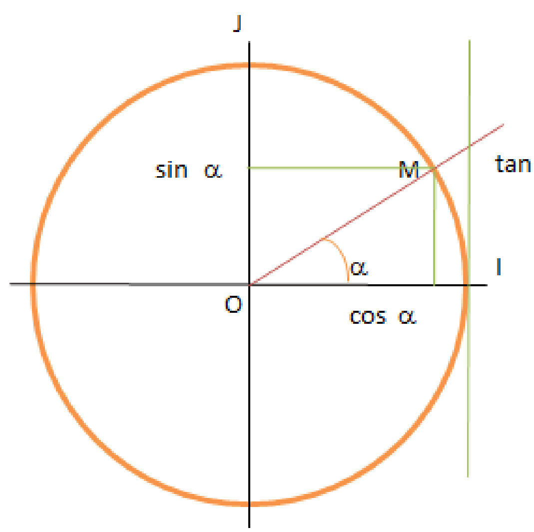
4 Nombres Complexes

L'objectif de ce chapitre est le calcul des racines d'un nombre complexe : les racines n-ième de l'unité et la résolution de polynôme de second degré à coefficient complexe. Ce chapitre commence par des **rappels** sur la trigonométrie et les nombres complexs que nous survelerons (voir aussi les exercices sur WIMS pour les rappels).

4.1 Quelques rappels

4.1.1 Trigonométrie

On considère le cercle trigonométrique, le cercle de centre $O = (0, 0)$ et de rayon 1



Soit M' le point tel que $OM' = \cos(\alpha)$. Le triangle OMM' est rectangle et l'hypoténuse est de longueur $OM = 1$ donc le vecteur $\overrightarrow{OM}$ s'écrit

$$\overrightarrow{OM} = \cos(\alpha)\overrightarrow{OI} + \sin(\alpha)\overrightarrow{OJ}$$

4.1.2 Un tableau utile

Voici quelques valeurs souvent rencontrées qui permettent de retrouver l'argument de certains nombres complexes de module 1 :

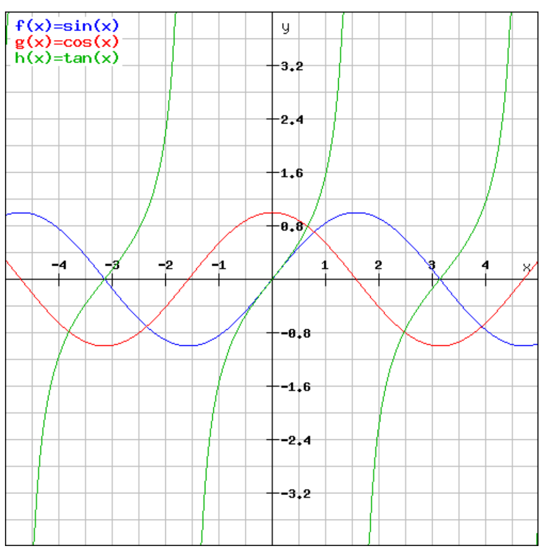
x en degrés : x en radians :	0 0	30° $\frac{\pi}{6}$	45° $\frac{\pi}{4}$	60° $\frac{\pi}{3}$	90° $\frac{\pi}{2}$
$\sin(x)$	0	$\frac{\sqrt{1}}{2} = \frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{4}}{2} = 1$
$\cos(x)$	$\frac{\sqrt{4}}{2} = 1$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{1}}{2} = \frac{1}{2}$	0
$\tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}$	0	$\frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	–

Propriétés 4.1.
- *La fonction cosinus est continue sur $\mathbb{R}$, 2π-périodique, paire.*
- *La fonction sinus est continue sur $\mathbb{R}$, 2π-périodique, impaire.*
- *La fonction tangente, $\tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}$ est définie sur $\mathbb{R} \setminus \{\frac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\}$, continue sur tout intervalle ne contenant pas de réel de la forme $\frac{\pi}{2} + k\pi$ ($k \in \mathbb{Z}$), π-périodique, impaire.*
- *Les fonctions cosinus et sinus sont dérivables sur $\mathbb{R}$ et*

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad (\sin)'(x) = \cos(x) \quad \textit{et} \quad (\cos)'(x) = -\sin(x).$$

- *La fonction tangente est dérivable sur tout intervalle ne contenant pas de réel de la forme $\frac{\pi}{2} + k\pi$ ($k \in \mathbb{Z}$), et : $(\tan)'(x) = 1 + \tan^2(x) = \frac{1}{\cos^2(x)}$.*

Courbes représentatives de $\sin x$ et $\cos x$ et $\tan x$



Formules de trigonométrie

Soient $x, y, a, b \in \mathbb{R}$

$$\cos^2 x + \sin^2 x = 1$$

$\cos(-x) = \cos(x)$	$\cos(\pi - x) = -\cos(x)$	$\cos(\pi + x) = -\cos(x)$
$\sin(-x) = -\sin(x)$	$\sin(\pi - x) = \sin(x)$	$\sin(\pi + x) = -\sin(x)$
$\tan(-x) = -\tan(x)$	$\tan(\pi - x) = -\tan(x)$	$\tan(\pi + x) = \tan(x)$
$\cos(\frac{\pi}{2} - x) = \sin(x)$	$\sin(\frac{\pi}{2} - x) = \cos(x)$	$\tan(\frac{\pi}{2} - x) = \frac{1}{\tan(x)}$

- $\cos(a+b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$, et donc $\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$,
- $\cos(a-b) = \cos a \cos b + \sin a \sin b$,
- $\sin(a+b) = \sin a \cos b + \cos a \sin b$, et donc $\sin 2x = 2 \sin x \cos x$,
- $\sin(a-b) = \sin a \cos b - \sin b \cos a$.

Exercice 90. 1. Sans utiliser la calculatrice, donner la valeur exacte des nombres suivants : $\sin(-\pi/3), \cos(5\pi/6), \tan(3\pi/4), \sin(2\pi/3), \cos(-3\pi/4), \sin(7\pi/3), \tan(25\pi/6)$

2. Montrer que $(\cos x + \sin x)^2 - (\cos x - \sin x)^2 = 2\sin(2x)$.

3. A l'aide d'un cercle trigonométrique, résoudre dans $]-\pi, \pi]$ les inéquations suivantes

$$a)\ \cos x \geq \frac{\sqrt{3}}{2}, \quad b)\ \sin x < \frac{1}{2} \quad c)\ 2\cos x - \sqrt{2} \leq 0.$$

4. Montrer que

   (a) $\cos p + \cos q = 2\cos\left(\frac{p+q}{2}\right)\cos\left(\frac{p-q}{2}\right)$,

   (b) $\cos p - \cos q = -2\sin\left(\frac{p+q}{2}\right)\sin\left(\frac{p-q}{2}\right)$,

   (c) $\sin p + \sin q = 2\sin\left(\frac{p+q}{2}\right)\cos\left(\frac{p-q}{2}\right)$,

   (d) $\sin p - \sin q = 2\sin\left(\frac{p-q}{2}\right)\cos\left(\frac{p+q}{2}\right)$.

4.1.3 Nombres complexes

Dans $\mathbb{R}$ l'équation

$$x^2 + 1 = 0$$

n'a pas de solution. On introduit alors un nouveau nombre appelé i vérifiant :

$$i^2 = -1.$$

On note alors

$$\boxed{\mathbb{C} := \{z = a + bi : a, b \in \mathbb{R}\}}$$

et on l'appelle l'ensemble des **nombres complexes.**

Pour $z = a + bi \in \mathbb{C}$, avec $a \in \mathbb{R}$ et $b \in \mathbb{R}$ on appelle

- $a = \operatorname{Re} z$ la *partie réelle* de z,
- $b = \operatorname{Im} z$ la *partie imaginaire* de z.

On a $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$ (tout élément $a \in \mathbb{R}$ s'écrit $a = a + 0i \in \mathbb{C}$).
Si $\mathrm{Re}\, z = 0$, on dit que z est *imaginaire pur*.

$\mathbb{C}^*$ désigne l'ensemble des nombres complexes non nuls.

Proposition 4.2. *(Unicité de l'écriture). Deux nombres complexes sont égaux si et seulement si leur partie réelle et leur partie imaginaire sont respectivement égales :*

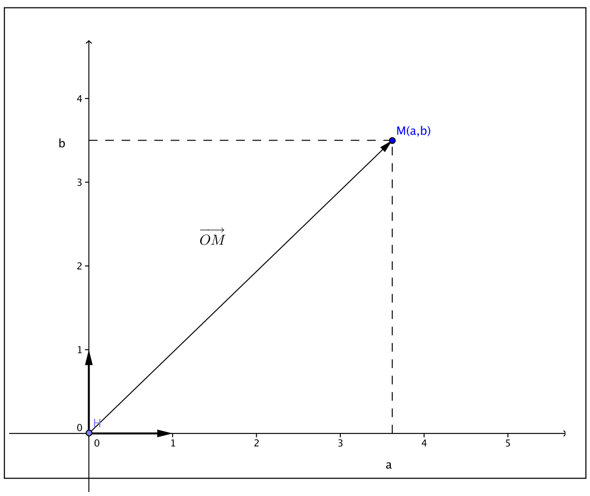
$$z = z' \iff \mathrm{Re}\, z = \mathrm{Re}\, z' \quad \textit{et} \quad \mathrm{Im}\, z = \mathrm{Im}\, z'$$

4.1.4 Représentation graphique

Dans le plan affine $\mathcal{P}$ muni d'un repère orthonormal direct $(O; \vec{u}, \vec{v})$, on peut associer à tout nombre complexe $z = a + ib$ avec $a \in \mathbb{R}$ et $b \in \mathbb{R}$, un point $M(a, b)$ de coordonnées (a, b).

Notation $M(z) = M(a, b)$.

Réciproquement, à tout point M de $\mathcal{P}$, de coordonnées a et b dans le repère, on peut associer un nombre complexe $z = a + bi$.



On dira que $M(a, b)$ est *l'image* de $z = a + bi$ et z est *l'affixe* de $M(a, b)$. z est également l'affixe du vecteur $\overrightarrow{OM} = a\vec{u} + b\vec{v}$

4.1.5 Forme trigonométrique

Soit $z = a + bi \in \mathbb{C}$ avec $a \in \mathbb{R}$, $b \in \mathbb{R}$ et $M = M(z)$ son image dans $\mathcal{P}$.

Définition 4.3. *On appelle* **module** *de z, noté $|z|$, le nombre*

$$\rho = |z| = \sqrt{a^2 + b^2} = \|\overrightarrow{OM}\|.$$

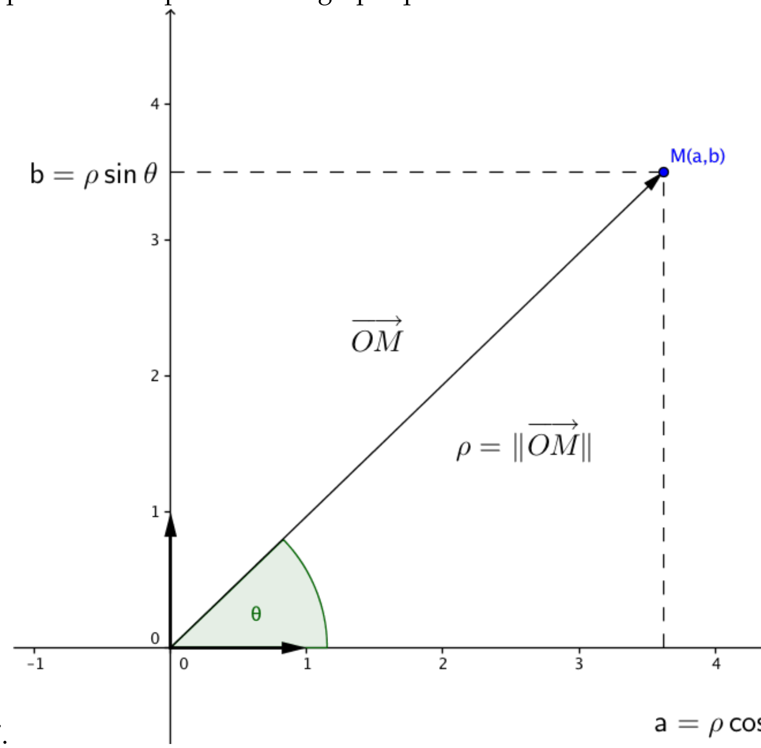
Si $z \neq 0$, on appelle **un argument** *de z tout nombre $\theta \in \mathbb{R}$ tel que*

$$\begin{cases} \cos\theta = \dfrac{a}{\rho} \\ \sin\theta = \dfrac{b}{\rho}. \end{cases}$$

Alors $\boxed{z = \rho(\cos\theta + i \sin\theta)}$ *est appelé* **forme trigonométrique** *du nombre $z \neq 0$.*

(ρ, θ) est appelé aussi les **coordonnées polaires** *de z.*

Exercice 91. Donner la forme trigonométrique les complexes et la représentation graphiques des



nombres complexes suivants : $1,\ -1,\ i,\ -i,\ 1+i,\ 1-i$.

4.1.6 Opérations

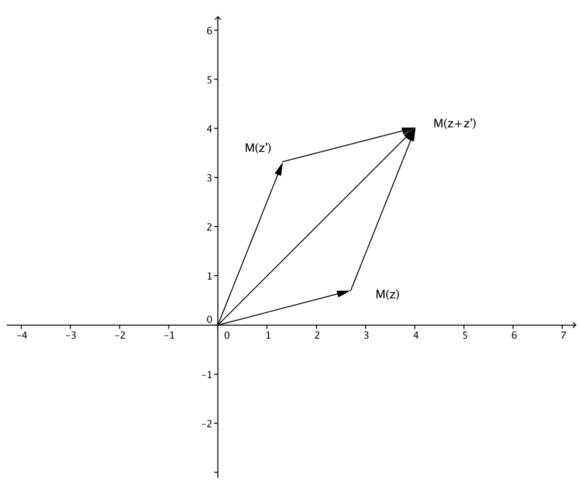
On effectue les opérations sur les complexes comme pour les réels :

Addition

Si $z = a + bi$ et $z' = a' + b'i$, alors

$$z + z' = (a + a') + (b + b')i.$$

Géométriquement, cela correspond à l'addition des vecteurs $\overrightarrow{OM}$ d'affixe z et $\overrightarrow{OM'}$ d'affixe z' :



Notons que l'affixe du milieu de $[MM']$ est $\dfrac{z+z'}{2}$.

Multiplication

Forme algébrique : si $z = a + bi$ et $z' = a' + b'i$, alors

$$zz' = (aa' - bb') + (ab' + a'b)i$$

(le calcul suit les lois habituelles de distributivitié, associativité, commutativité).

Forme trigonométrique : Si $z = \rho(\cos\theta + i\sin\theta)$ et $z' = \rho'(\cos\theta' + i\sin\theta')$ alors

$$\begin{aligned} zz' &= \rho\rho'\Big((\cos\theta\cos\theta' - \sin\theta\sin\theta') + i(\cos\theta\sin\theta' + \cos\theta'\sin\theta)\Big) \\ &= \rho\rho'\Big(\cos(\theta+\theta') + i(\sin(\theta+\theta')\Big) \end{aligned}$$

4.1.7 Propriétés

Soit $z \in \mathbb{C}$ alors

- Pour tout $r > 0$, $|rz| = r|z|$.
- $|z| = 1 \iff z = \cos\theta + i\sin\theta$ avec $\theta \in \mathbb{R}$.
- $|z| = 0$ si et seulement si $z = 0$.
- Inégalité triangulaire : $|z + z'| \leq |z| + |z'|$.
- $\boxed{\text{L'argument n'est pas défini pour } z = 0}$.

Soit $z \neq 0$. Si θ est un argument de z, alors $\theta + 2k\pi$ sera également argument de z pour tout $k \in \mathbb{Z}$.L'argument de z est défini à 2π près.

Notations

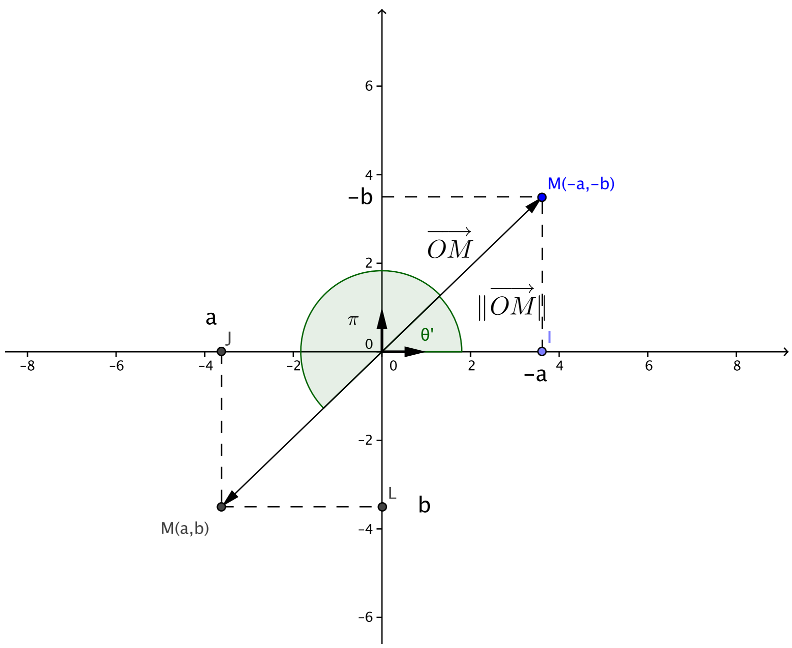
Soit $z \neq 0$, on notera par :

- $\theta = \operatorname{Arg} z$ l'argument de z dans $]-\pi, \pi]$, c'est l'Argument Principal.
- $\arg z$ l'ensemble $\{\theta + 2k\pi \ : \ k \in \mathbb{Z}\}$. On écrira aussi $\arg z \equiv \theta[2\pi]$ pour exprimer que l'argument est déterminé à 2π près.

Voici des propriétés de calcul de de l'argument d'un complexe $z = a + ib$

- si z est réel ($b = 0$) et $a > 0$: $\arg(z) \equiv 0[2\pi]$,
- si z est réel ($b = 0$) et $a < 0$: $\arg(z) \equiv \pi[2\pi]$,
- si z imaginaire pur ($a = 0$) et $b > 0$: $\arg(z) \equiv \dfrac{\pi}{2}[2\pi]$,
- si z imaginaire pur ($a = 0$) et $b < 0$: $\arg(z) \equiv -\dfrac{\pi}{2}[2\pi]$,

4.1.8 Calcul d'argument d'un complexe dont la partie réelle est négative



Par exemple, si $z = \frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$, on retrouve des valeurs caractéristiques du tableau. Observons d'abord que $|z| = 1$. On remarque ensuite que $\operatorname{Re} z = \frac{1}{2} = \cos\frac{\pi}{3}$. Comme le signe devant la partie imaginaire est négatif et $\sin\frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$, on en déduit que $\arg z \equiv -\frac{\pi}{3}[2\pi]$. Ainsi

$$\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2} = \cos(-\pi/3) + i\sin(-\pi/3).$$

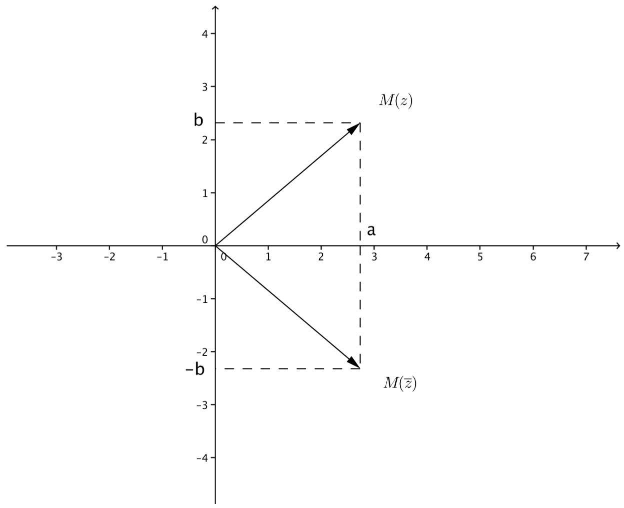
Exercice 92. Quel serait l'argument de $z = -1 + \sqrt{3}i$?

4.1.9 Conjugaison

Pour un nombre $z = a + bi \in \mathbb{C}$ avec $a, b \in \mathbb{R}$, on notera son **conjugué** par

$$\overline{z} = a - bi.$$

Géométriquement, cela correspond à une symétrie par rapport à l'axe réel :



Propriétés 4.4. *Soit $z, z' \in \mathbb{C}$, nous avons*

- $z\overline{z} = |z|^2$,
- $|\overline{z}| = |z|$,
- $\arg \overline{z} \equiv -\arg z$, $z \neq 0$
- $\operatorname{Re} z = \dfrac{1}{2}(z + \overline{z})$,
- $\operatorname{Im} z = \dfrac{1}{2i}(z - \overline{z})$,
- *pour tout $z, z' \in \mathbb{C}$, $\overline{z \times z'} = \overline{z} \times \overline{z'}$ et $\overline{z + z'} = \overline{z} + \overline{z'}$.*

4.1.10 Opérations

Nous avons déjà vu l'addition et la multiplication de deux nombres complexes. Rappelons que si $z = \rho(\cos\theta + i\sin\theta)$ et $z' = \rho'(\cos\theta' + i\sin\theta')$ alors

- $|zz'| = |z| \times |z'| = \rho\rho'$,
- $\arg(zz') \equiv \arg(z) + \arg(z')[2\pi]$,

« On multiplie deux nombres complexes en multipliant les modules et en additionnant les arguments. »

Inverse

Si $0 \neq z = a + bi \in \mathbb{C}$, alors l'inverse de z s'écrit :

$$\frac{1}{z} = \frac{1}{a+bi} = \frac{a-ib}{a^2+b^2} = \frac{a}{a^2+b^2} + i\frac{-b}{a^2+b^2} = \frac{\overline{z}}{|z|^2}.$$

Notons que

$$\frac{1}{z} = \frac{\overline{z}}{|z|^2}$$

Voici les propriété sur le module et l'argument d'un quotient de deux complexes :

Propriétés 4.5.
- $\left|\frac{1}{z}\right| = \frac{1}{|z|}$, $z \neq 0$,
- $\left|\frac{z}{z'}\right| = \frac{|z|}{|z'|}$, $z' \neq 0$,
- $\arg \frac{1}{z} \equiv -\arg z[2\pi]$, $z \neq 0$,
- $\arg \frac{z}{z'} \equiv \arg z - \arg z'[2\pi]$, $z \neq 0$, $z' \neq 0$.

Conséquence :
Si $z = \rho(\cos\theta + i\sin\theta) \neq 0$, alors

$$\boxed{\frac{1}{z} = \frac{1}{\rho}(\cos\theta - i\sin\theta) = \frac{\overline{z}}{|z|^2}.}$$

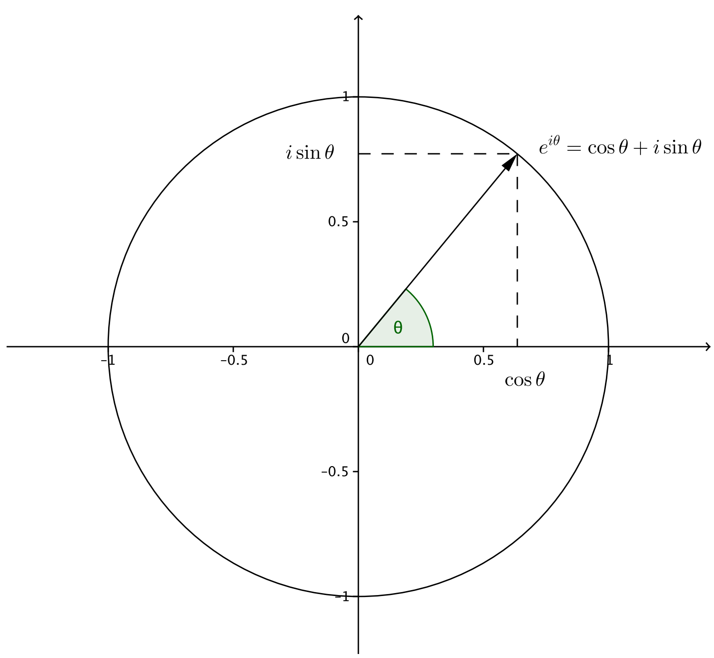
4.2 Notation exponentielle

Pour $\theta \in \mathbb{R}$, on écrira (**formule d'Euler**)

$$\boxed{e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta,}$$

qui est un nombre de module 1, donc $e^{i\theta}$ est sur le cercle unité.

Donc $e^{i0} = 1$, $e^{i\frac{\pi}{2}} = i$, $e^{i\pi} = -1$ et $e^{-i\frac{\pi}{2}} = -i$.



Notation exponentielle : $\boxed{z = \rho e^{i\theta}}$, où $\rho = |z|$, $\operatorname{Arg} z = \theta$ ($z \neq 0$). On a

$$\begin{cases} \cos\theta = \operatorname{Re} e^{i\theta} = \dfrac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2} \\ \sin\theta = \operatorname{Im} e^{i\theta} = \dfrac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i} \end{cases}$$

Alors, d'après ce que nous avons déjà vu sur la multiplication de nombres complexes :

$$\boxed{e^{i\theta} e^{i\theta'} = e^{i(\theta+\theta')}}$$

Notons que

$$\boxed{e^{-i\theta} = \frac{1}{e^{i\theta}}}$$

On a **la formule de Moivre**

$$\boxed{(\cos\theta + i\sin\theta)^n = \cos(n\theta) + i\sin(n\theta)}$$

Preuve : Exercice : démontrer la formule de Moivre en effectuant une preuve par récurrence sur n

4.3 Racines d'un nombre complexe.

On se donne un complexe w et on cherche à résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $Z^2 = w$

4.3.1 Racines carrées.

Proposition 4.6. *Pour tout nombre complexe $w = a + ib$ non nul avec $a \in \mathbb{R}$ et $b \in \mathbb{R}$, l'équation $Z^2 = w$ admet deux solutions opposées qui s'écrivent $Z = x + iy$, $x \in \mathbb{R}$ et $y \in \mathbb{R}$ avec*

$$\begin{cases} x^2 - y^2 = a \\ x^2 + y^2 = \sqrt{a^2 + b^2} \\ 2xy = b \end{cases}$$

Preuve :

$$(x + iy)^2 = a + ib \iff x^2 - y^2 = a \text{ et } 2xy = b.$$

On peut adjoindre également l'équation $|Z^2| = |w|$ ce qui donne $x^2 + y^2 = \sqrt{a^2 + b^2}$. On voit alors qu'il y a exactement deux solutions obtenues en calculant x^2 et y^2 et en comparant les signes de x et y par l'équation $2xy = b$.

Exercice 93. Résoudre $Z^2 = 3 - 4i$.

4.3.2 Racines n-ièmes.

Notons que l'équation $Z^2 = -1$ admet deux solutions $i, -i$. De même l'équation $Z^2 = -2$ admet deux solutions $i\sqrt{2}, -i\sqrt{2}$ et plus généralement $Z^2 = -a$ avec $a > 0$ donné admet deux solutions $i\sqrt{a}, -i\sqrt{a}$.

Proposition 4.7. *Soient $0 \neq w \in \mathbb{C}$ et $n \in \mathbb{N}^*$. L'équation $Z^n = w$ admet exactement n solutions distinctes appelées* **racines n-ièmes de** *w. Si w s'écrit sous forme trigonométrique $w = \rho e^{i\theta}$ avec $\rho > 0$, alors les racines n-ièmes de w sont les complexes :*

$$\boxed{z_k = \rho^{1/n} e^{i\left(\frac{\theta}{n} + k\frac{2\pi}{n}\right)}, \quad \text{avec } k \in \{0, 1, \ldots, n-1\}}.$$

Preuve : Ecrivons Z solution de $Z^n = w$ sous sa forme trigonométrique $Z = re^{i\gamma}$. Alors

$$Z^n = w \iff (re^{i\gamma})^n = \rho e^{i\theta}$$

Par la formule de Moivre on a alors

$$r^n e^{in\gamma} = \rho e^{i\theta}$$

autrement

$$r^n = \rho \quad \text{et} \quad n\gamma = \theta + k2\pi \text{ avec } k \in \mathbb{Z}$$

Ainsi, Z s'écrit

$$Z = \rho^{1/n} e^{i\left(\frac{\theta}{n} + k\frac{2\pi}{n}\right)}.$$

Cela fait n complexes distincts que l'on obtient en donnant à k les valeurs de n entiers successifs par exemple $0, \ldots, n-1$ ou encore $1, \ldots, n$ etc.

Remarque

Soit $w \in \mathbb{C}^*$. Lorsque $n = 2$, les solutions de l'équation $Z^2 = w$ sont appelées les **racines carrées** de w. (PAS D'ECRITURE $\sqrt{w}$ POUR CES DEUX SOLUTIONS).

4.3.3 Racines n-ième de l'unité.

Dans $\mathbb{R}$, l'équation $x^n = 1$ admet soit deux solutions $1, -1$ si n est pair ou une seule solution $\{1\}$ si n est impair. Dans $\mathbb{C}$, nous avons toujours n solutions distinctes : Nous étudions le cas particulier où $w = 1$.

Proposition 4.8. *Les solutions de $z^n = 1$ sont*

$$\boxed{z_k = e^{ik\frac{2\pi}{n}}, \quad \text{avec } k \in \{0, \ldots, n-1\}.}$$

Par exemple :

$$\begin{array}{lll} n = 2, & \text{les solutions de } z^2 = 1 \text{ sont :} & 1 \text{ et } e^{i\pi} = -1, \\ n = 3, & \text{les solutions de } z^3 = 1 \text{ sont :} & 1, \ e^{i\frac{2\pi}{3}} = \dfrac{-1 + i\sqrt{3}}{2} = j \text{ et } e^{i\frac{4\pi}{3}} = \dfrac{-1 - i\sqrt{3}}{2} = \bar{j} = j^2, \\ n = 4, & \text{les solutions de } z^4 = 1 \text{ sont ;} & 1, \ e^{i\frac{\pi}{2}} = i, \ e^{i\pi} = -1, \ e^{i\frac{3\pi}{2}} = -i. \end{array}$$

Si on pose $\xi = e^{i\frac{2\pi}{n}}$, les racines n-ième de l'unité sont les ξ^k avec $k \in \{0, 1, \ldots, n-1\}$. On notera que

$$\boxed{\sum_{k=0}^{n-1} \xi^k = \frac{\xi^n - 1}{\xi - 1} = \frac{1-1}{\xi - 1} = 0.}$$

Interprétation : L'isobarycentre (ou centre de gravité) des polygônes réguliers de sommets $\{\xi^k, k \in \{0, \ldots, n-1\}\}$ est situé en 0.

4.3.4 Exponentielle Complexe

Définition 4.9. *Soit $z = a + ib$.* **L'exponentielle complexe** *de z est définie par*

$$e^z = e^a e^{ib}.$$

Exercice 94. Montrer que $e^z e^w = e^{z+w}$ et $\frac{e^z}{e^w} = e^{z-w}$ pour $z, w \in \mathbb{C}$.

4.4 Equations polynômiales du second degré

Commençons par quelques rappels du lycée : Soit l'équation $az^2 + bz + c = 0$, d'inconnue z où a, b et c sont des réels et $a \neq 0$. Soit $\Delta = b^2 - 4ac$ le discriminant de cette équation alors :

- Si $\Delta > 0$, l'équation admet deux solutions réelles distinctes

$$z_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} \quad \text{et} \quad z_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}.$$

- Si $\Delta = 0$, l'équation admet une seule solution double $z_0 = -\frac{b}{2a}$.

- Si $\Delta < 0$ l'équation admet deux solutions complexes conjuguées distinctes

$$z_1 = \frac{-b - i\sqrt{|\Delta|}}{2a} \quad \text{et} \quad z_2 = \frac{-b + i\sqrt{|\Delta|}}{2a}.$$

Notons que lorsque $\Delta < 0$, l'équation $ax^2 + bx + c = 0$ n'admet pas de solutions dans $\mathbb{R}$.

Le problème qui nous intéresse maintenant est de trouver z tel que

$$\boxed{az^2 + bz + c = 0}$$

où $a \in \mathbb{C}^*$, $b \in \mathbb{C}$ et $c \in \mathbb{C}$ **sont des complexes donnés**. On a

$$\begin{aligned} az^2 + bz + c = 0 \quad &\iff \quad z^2 + \frac{b}{a}z + \frac{c}{a} = 0 \\ &\iff \quad \left(z + \frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{c}{a} - \left(\frac{b}{2a}\right)^2 = 0 \\ &\iff \quad \left(z + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2} = 0. \end{aligned}$$

Ceci implique la propriétés suivante

Proposition 4.10. *Soit $\Delta = b^2 - 4ac \in \mathbb{C}$.*

- *Si $\Delta = 0$, l'équation admet une seule solution double $z = -\frac{b}{2a}$.*

- *Si $\Delta \neq 0$, notons δ et $-\delta$ ses racines carrées, l'équation admet deux solutions distinctes*

$$z_1 = \frac{-b + \delta}{2a} \quad \textit{et} \quad z_2 = \frac{-b - \delta}{2a}.$$

4.5 Exercices

4.5.1 Ecriture algébrique et trigonométrique

Exercice 95. Ecrire sous la forme $x+iy$, $(x,y)\in\mathbb{R}^2$, les nombres complexes suivants :

$$\textbf{a.}\ \forall n\in\mathbb{N}\quad i^n \quad \textbf{b.}\ \frac{1+2i}{2+i} \quad \textbf{c.}\ (2+3i)^3 \quad \textbf{d.}\ \frac{2+5i}{1-i}+\frac{2-5i}{1+i}.$$

Exercice 96. Calculer le module et argument des nombres complexes suivants :

1. $1+i\sqrt{3}$
2. $-\sqrt{6}+i\sqrt{2}$
3. $(1-i)(\sqrt{3}-i)(\cos\frac{\pi}{5}+i\sin\frac{\pi}{5})$
4. $\left(\frac{1+i\sqrt{3}}{1-i}\right)^4$

Exercice 97. Déterminer les entiers naturels n tels que $(1-i\sqrt{3})^n$ soit

1. imaginaire pur,
2. réel négatif.

Exercice 98. Donner l'écriture cartésienne et l'écriture trigonométrique de $\frac{\sqrt{3}-i}{1-i}$.

En déduire les valeurs de $\cos\frac{\pi}{12}$ et de $\sin\frac{\pi}{12}$.

Exercice 99.
1. Exprimer $\cos\theta$ à l'aide de $e^{i\theta}$ et de $e^{-i\theta}$.
2. Calculer $\left(e^{i\theta}+e^{-i\theta}\right)^5$ à l'aide de la formule du binôme de Newton.
3. En regroupant les termes de la forme $e^{in\theta}$ et $e^{-in\theta}$, trouver une expression de $\cos^5\theta$ en fonction des cosinus et des sinus de multiples de θ.

Exercice 100.
1. Exprimer $e^{5i\theta}$ en fonction des puissances de $\cos\theta$ et de $\sin\theta$.
2. En déduire une expression de $\cos 5\theta$ en fonction des puissances de $\cos\theta$ et de $\sin\theta$.

Exercice 101. Soit x un nombre réel appartenant à $]-\pi,\pi[$. Déterminer le module et l'argument de $1+e^{ix}$ (mettre $e^{i\frac{x}{2}}$ en facteur).

4.5.2 Résolution d'équations dans $\mathbb{C}$

Exercice 102. Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations

$$\textbf{A.}\ z^3=8i \quad \textbf{B.}\ 4z^4=-i \quad \textbf{C.}\ (z+1)^4=-16.$$

Exercice 103.
1. Déterminer les racines cubiques de l'unité (i.e. les complexes z tels que $z^3=1$). On donnera leur forme algébrique et leur forme trigonométrique.
2. Soient j et j' les deux racines non réelles de cette équation. Montrer que

$$j'=j^2=\bar{j}, \qquad 1+j+j^2=0$$

Exercice 104. Cas particulier des racines carrées. Résoudre dans $\mathbb{C}$:

1. $z^2 = -4$
2. $z^2 = -3$
3. $z^2 = 2i$
4. $z^2 = 1 + i$
5. $z^2 = -2\sqrt{3} + 2i$
6. $z^2 = 3 - 4i$.(On pourra chercher z sous la forme $a + ib$).

Exercice 105. Résoudre dans $\mathbb{C}$:

1. $z^2 - 5iz - 7 + i = 0$
2. $z^2 + 2iz\sqrt{2} - 2(1 + i) = 0$.

Exercice 106. Résoudre dans $\mathbb{C}$:

1. $z^2 + z + 1 = 0$.
2. $z^2 + 2z + 5 = 0$.

Exercice 107. 1. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^2 + z + 1 = 0$.
2. Mettre les solutions de cette équation sous forme trigonométrique.
3. Résoudre $Z^4 + Z^2 + 1 = 0$, (donner les solutions sous forme trigonométrique).

Exercice 108. Résoudre dans $\mathbb{C}$:

$$z^3 - 2z^2 - iz + 3 - i = 0$$

sachant qu'elle admet une solution réelle.

$$z^4 + (-4 + 3i)z^2 + 7 - i = 0.$$

Exercice 109.

1. Combien l'équation $z^5 = 1$ admet-elle de solutions dans $\mathbb{C}$? Donner sous la forme trigonométrique (ou polaire) toutes les solutions de l'équation $z^5 = 1$ dans le corps des nombres complexes.
2. Soit z une solution de l'équation $z^5 = 1$ dans $\mathbb{C}$; montrer que $\bar{z} = \dfrac{1}{z}$.
3. Soit z une solution de l'équation $z^5 = 1$ dans $\mathbb{C}$; montrer que si $z \neq 1$, on a
$$1 + z + z^2 + z^3 + z^4 = 0$$
puis en déduire
$$z^2 + \bar{z}^2 + z + \bar{z} + 1 = 0$$
4. Si $z = e^{i\theta}$, vérifier que : $z^2 + \bar{z}^2 + z + \bar{z} + 1 = 4\cos^2\theta + 2\cos\theta - 1$. En déduire que le nombre $\cos(\dfrac{2\pi}{5})$ s'écrit $x + y\sqrt{5}$ où x et y sont deux nombres rationnels que l'on calculera.

.

5

Fonctions

5.1 Généralités sur les fonctions

- On appelle *fonction d'une variable réelle à valeurs réelles*, ou encore, *fonction numérique*, une *application* d'une partie D de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, autrement dit une correspondance entre les éléments de D et ceux de $\mathbb{R}$ telle que tout élément de D à une seule image.
- La partie D est appelée **ensemble de définition** de la fonction. En général, D est un intervalle ou une réunion d'intervalles.
- La phrase générique "Soit f une fonction réelle définie sur D" signifie que f est une application de D dans $\mathbb{R}$.
- Comme exemples de fonction définie sur $\mathbb{R}$: $x \to x^2$, $x \to e^x$, $x \to \cos(x)$, $x \to \sin(x)$. La fonction $f : x \to \ln x$ est définie sur $]0, +\infty[$.

Définition 5.1. *Soit $f : D \to \mathbb{R}$ une fonction. On dit que :*

- *f est* **majorée** *si* $\exists M \in \mathbb{R} \quad \forall x \in D \quad f(x) \leq M.$
- *f est* **minorée** *si* $\exists m \in \mathbb{R} \quad \forall x \in D \quad f(x) \geq m.$
- *f est* **bornée** *si elle est minorée et majorée. Cela équivaut à :* $\exists A \in \mathbb{R} \quad \forall x \in D \quad |f(x)| \leq A$

5.2 Limite

5.2.1 Limite d'une fonction en un point de $\mathbb{R}$

$\lim_{x \to x_0} f(x) = \ell$ signifie que "tout intervalle contenant ℓ, contient $f(x)$ pour x assez proche de x_0. Plus précisément

Définition 5.2. *(Limite finie en un point)*

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction définie sur un intervalle ouvert I. Soit $x_0 \in I$ ou l'une des extrémités de I On dit que ℓ est limite de f en x_0 si

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \forall x \in I \qquad |x - x_0| \leq \delta \Longrightarrow |f(x) - \ell| \leq \varepsilon.$$

On note alors $\lim_{x \to x_0} f(x) = \ell.$

Remarque.

1. L'ordre des quantificateurs est important et on ne peut pas échanger $\forall\varepsilon$ avec $\exists\delta$: le δ dépend du ε.
2. L'inégalité $|x - x_0| \leq \delta$ équivaut à $x \in [x_0 - \delta, x_0 + \delta]$. L'inégalité $|f(x) - \ell| \leq \varepsilon$ équivaut à $f(x) \in [\ell - \varepsilon, \ell + \epsilon]$.
3. Si x_0 est un point de I et si f admet une limite finie en x_0, alors nécessairement cette limite est égale à $f(x_0)$.

Définition 5.3. *(limite infinie en un point) Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction définie sur un intervalle I. Soit $x_0 \in I$ ou l'une des extrémités de I.*

- *On dit que $+\infty$ est limite de f en x_0 si*

$$\forall M \in \mathbb{R} \quad \exists \delta > 0 \quad \forall x \in I \qquad |x - x_0| \leq \delta \Longrightarrow f(x) \geq M.$$

On note alors $\lim_{x \to x_0} f(x) = +\infty$.

- *On dit que $-\infty$ est limite de f en x_0 si*

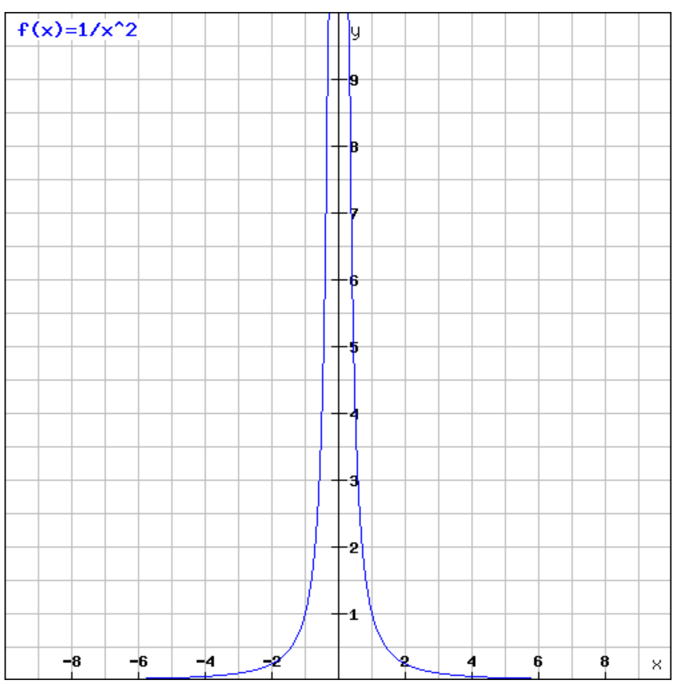
$$\forall M \in \mathbb{R} \quad \exists \delta > 0 \quad \forall x \in I \qquad |x - x_0| \leq \delta \Longrightarrow f(x) \leq M.$$

On note alors $\lim_{x \to x_0} f(x) = -\infty$.

- $\lim_{x \to x_0} f(x) = +\infty$ signifie que $f(x)$ est aussi grand que l'on veut quand x est assez proche de x_0.

  On dit alors que la droite d'équation $x = x_0$ est *asymptote verticale* à la courbe représentative de la fonction f.

- Exemple : On a $\lim_{x \to 0} \dfrac{1}{x^2} = +\infty$.



Proposition 5.4. (**Unicité de la limite**). *Si f admet ℓ et ℓ' pour limites en x_0, alors $\ell = \ell'$.*

5.2.2 Limite d'une fonction en l'infini

Définition 5.5. *Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction définie sur un intervalle I de la forme $]a, +\infty[$. Soit $\ell \in \mathbb{R}$.*

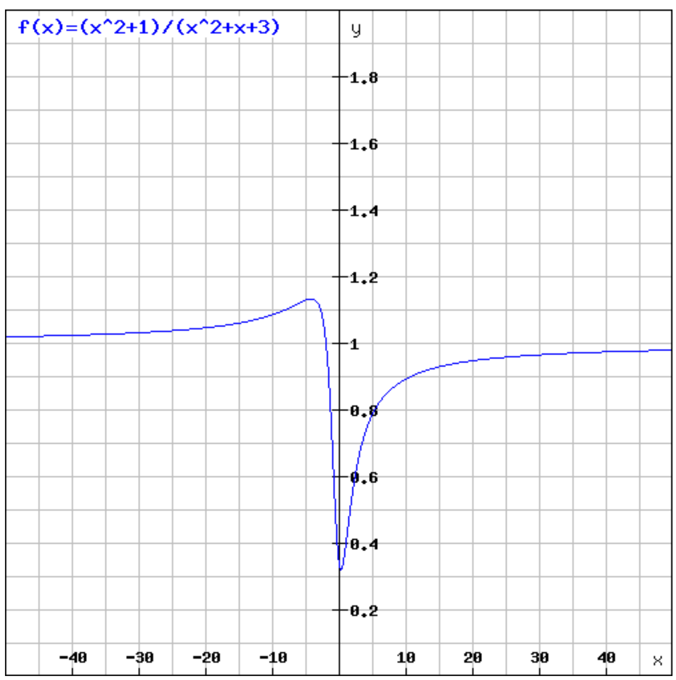
- *On dit alors que ℓ est limite en $+\infty$ si*
$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists B > 0 \quad \forall x \in I \qquad x \geq B \Longrightarrow |f(x) - \ell| \leq \varepsilon.$$
On note alors $\lim_{x \to +\infty} f(x) = \ell$.

- *On dit que f a pour limite $+\infty$ en $+\infty$ si*
$$\forall A > 0 \quad \exists B > 0 \quad \forall x \in I \qquad x \geq B \Longrightarrow f(x) \geq A.$$
On note alors $\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$.

- $\lim_{x \to +\infty} f(x) = \ell$ signifie $f(x)$ est aussi proche de ℓ que l'on veut quand x est suffisamment grand.

  On dit alors que la droite d'équation $y = \ell$ est une *asymptote horizontale* à la courbe représentative de la fonction f

  Par exemple $\lim_{x \to +\infty} \dfrac{x^2 + 1}{x^2 + x + 3} = 1$ et $\lim_{x \to -\infty} \dfrac{x^2 + 1}{x^2 + x + 3} = 1$. (Voir ci-dessous)



- $\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$ signifie , $f(x)$ est aussi grand que l'on veut lorsque x est suffisamment grand.

- On définirait de la même manière la limite en $-\infty$ pour les fonctions définies sur des intervalles de type $] - \infty, a[$.

- Exemple de référence : Soit $n \geq 1$ et $m \geq 1$. Nous avons
  - $\lim_{x \to +\infty} x^n = +\infty$,

- $\lim\limits_{x \to -\infty} x^n = \begin{cases} +\infty & \text{si n est pair ,} \\ -\infty & \text{si n est impair,} \end{cases}$

- $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{1}{x^n} = 0,$

- $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{1}{x^n} = 0.$

- $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x^n}{x^m} = \lim\limits_{x \to +\infty} x^{n-m} = \begin{cases} +\infty & \text{si} & n > m \\ 1 & \text{si} & n = m \\ 0 & \text{si} & n < m \end{cases}$

- Si $P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots a_1 x + a_0$ avec $a_n \neq 0$ et

  $Q(x) = b_m x^m + b_{m-1} x^{m-1} + \ldots b_1 x + b_0$ avec $b_m \neq 0$, alors

$$\boxed{\lim_{x \to +\infty} \frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{a_n}{b_m} \lim_{x \to +\infty} \frac{x^n}{x^m}}.$$

  Ceci ne s'applique pas lorsque $x \to 0$, seulement lorsque $x \to +\infty$.

5.2.3 Limite à gauche et à droite

Il arrive que le comportement local d'une fonction f soit différent à gauche d'un point x_0 (c'est à dire pour $x < x_0$) et à droite de x_0 (c'est à dire $x > x_0$). Nous sommes donc amenés à introduire les notions de limites à gauche et à droite :

Définition 5.6. *Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction définie sur un intervalle I (de la forme $]a, x_0[$, $]x_0, b[$ ou $]a, x_0[\cup]x_0, b[$) . Soit $\ell \in \mathbb{R}$.*

- *On dit que f admet ℓ pour limite à gauche en x_0 si la restriction de f à $]a, x_0[$ admet ℓ pour limite en x_0.*

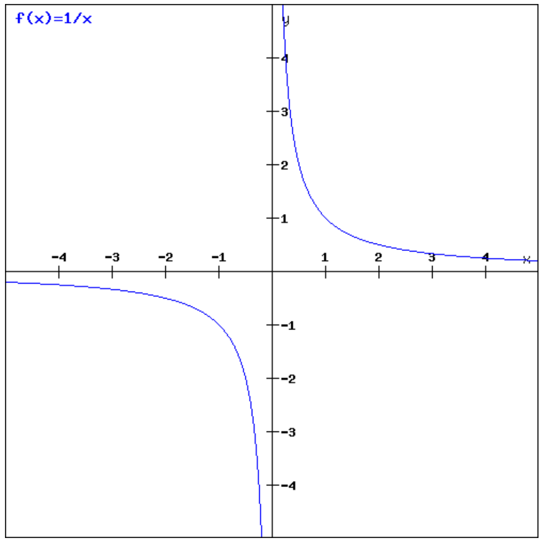
  On note alors $\lim\limits_{x \to x_0^-} f(x) = \ell$

- *On dit que f admet l pour limite à droite en x_0 si la restriction de f à $]x_0, b[$ admet ℓ pour limite en x_0.*

  On note alors $\lim\limits_{x \to x_0^+} f(x) = \ell$

On note aussi $\lim\limits_{x \to x_0^-} f(x)$ par $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ x < x_0}} f(x)$ et $\lim\limits_{x \to x_0^+} f(x)$ par $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ x > x_0}} f(x)$

Exemple : $\lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{1}{x} = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to 0^-} \dfrac{1}{x} = -\infty$



5.2.4 Opérations sur les limites

Opérations algébriques **Cas des limites finies.**

Soient f et g deux fonctions admettant des limites finies en a, alors :

1. $f+g$ admet une limite en a et $\lim\limits_{x\to a}(f+g)(x) = \lim\limits_{x\to a} f(x) + \lim\limits_{x\to a} g(x)$
2. fg admet une limite en a et $\lim\limits_{x\to a}(fg)(x) = \lim\limits_{x\to a} f(x)\ \lim\limits_{x\to a} g(x)$
3. Pour tout réel λ, λf admet une limite en a et $\lim\limits_{x\to a}(\lambda f)(x) = \lambda \lim\limits_{x\to a} f(x)$
4. Si de plus la limite de g est non nulle, $\dfrac{f}{g}$ admet une limite en a et $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f}{g}(x) = \dfrac{\lim_{x\to a} f(x)}{\lim_{x\to a} g(x)}$
5. Si f admet l comme limite en a, alors $|f|$ admet $|l|$ comme limite en a.

Composition des limites.

Définition 5.7. *Soient deux fonctions $f : I \to \mathbb{R}$ et $g : J \to \mathbb{R}$ telles que $f(I) \subset J$. On définit la composée de f par g noté $g \circ f : I \to \mathbb{R}$ par*

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) \qquad \forall x \in I.$$

Soit la fonction $f : x \to x-1$ pour $x \in \mathbb{R}$ et soit la fonction $g : x \to \ln x$ définie sur $]0, +\infty[$. La fonction $f \circ g(x) = \ln(x-1)$ n'est pas définie sur $\mathbb{R}$ mais seulement sur $]1, +\infty[$.

Théorème 5.8 (Théorème de la limite composée)**.** *Soient deux fonctions $f : I \to \mathbb{R}$ et $g : J \to \mathbb{R}$ tel que $f(I) \subset J$. Soit $a \in I$ ou l'une des extrémités de I et soit $b \in J$ ou l'une des extrémités de J. Alors*

$$\text{Si} \quad \lim_{x\to a} f(x) = b \quad \text{et} \quad \lim_{x\to b} g(x) = \ell, \quad \text{alors} \quad \lim_{x\to a}(g \circ f)(x) = \ell$$

a, b et ℓ peuvent être finis ou infinis.

Calculer la limite $\lim\limits_{x\to 0} \ln(\cos(x))$.

Opérations algébriques. Cas des limites infinies.

1. Si $\lim f = \ell$ et $\lim g = +\infty$, alors $\lim(f+g) = +\infty$.
2. Si $\lim f = \ell$ et $\lim g = -\infty$, alors $\lim(f+g) = -\infty$.
3. Si $\lim f = +\infty$ et $\lim g = +\infty$, alors $\lim(f+g) = +\infty$.
4. Si $\lim f = \ell \neq 0$ et $\lim g = +\infty$, alors $\lim(fg) = +\infty$ si $\ell > 0$, ou $\lim fg = -\infty$ si $l < 0$.
5. Si $\lim f = \ell \neq 0$ et $\lim g = -\infty$, alors $\lim(fg) = -\infty$ si $\ell > 0$, ou $\lim(fg) = +\infty$ si $l < 0$.
6. Si $\lim f = +\infty$ et $\lim g = +\infty$, alors $\lim(f\,g) = +\infty$.
7. **Formes indéterminées** : $+\infty - \infty, 0 \times \infty, \frac{0}{0}, \frac{\infty}{\infty}, 1^\infty$

5.2.5 Théorèmes sur les limites

Théorème 5.9.

- *Si* $\lim_{x\to a} f(x) = \ell \in \mathbb{R}$ *et s'il existe* $A \in \mathbb{R}$ *tel que* $f(x) \leq A$*, alors* $\ell \leq A$.
- *Si* $f(x) \leq g(x)$ *et si* $\lim_{x\to a} f(x) = \ell \in \mathbb{R}$ *et* $\lim_{x\to a} g(x) = \ell'$*, alors* $\ell \leq \ell'$.
- *(Théorème des gendarmes) Si* $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$ *et si* $\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} h(x) = \ell$*, alors* g *admet aussi une limite en* a *et* $\lim_{x\to a} g(x) = \ell$
- *Si* $f(x) \leq g(x)$ *et si* $\lim_{x\to a} f(x) = +\infty$*, alors* $\lim_{x\to a} g(x) = +\infty$.
- *Si* $f(x) \leq g(x)$ *et* $\lim_{x\to a} g(x) = -\infty$*, alors* $\lim_{x\to a} f(x) = -\infty$.

Remarque.

1. Les inégalités strictes ne sont pas conservées *par passage à la limite*. Par exemple $\forall x \in \mathbb{R}$, $\frac{1}{1+x^2} > 0$ mais $\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{1+x^2} = 0$.
2. $\lim_{x\to+\infty} \frac{\sin x}{1+x^2} = 0$. En effet, $-1 \leq \sin x \leq 1$ et puisque $1+x^2 > 0$, on a alors pour tout x
$$\frac{-1}{1+x^2} \leq \frac{\sin x}{1+x^2} \leq \frac{1}{1+x^2}.$$
Puisque $\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{1+x^2} = 0$, le théorèmes des gendarmes (appelé aussi Théorème d'encadrement) nous donne le résultat.

5.3 Continuité

Dans cette partie I désigne un intervalle non vide de $\mathbb{R}$.

5.3.1 Définitions

Définition 5.10. *Soient* f *une fonction définie sur* $]a,b[$ *et* $x_0 \in]a,b[$. *On dit que* f *est continue en* x_0 *si*
$$\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0).$$
On dit que f *est continue sur* $]a,b[$ *si elle est continue en tout point* x_0 *de* $]a,b[$.

Remarques

1. Notons que f est continue en x_0 est équivalent à
$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \eta > 0 \quad \forall x \in I \qquad |x - x_0| \leq \eta \Longrightarrow |f(x) - f(x_0)| \leq \varepsilon$$

2. La continuité assure par exemple que si la fonction n'est pas nulle en un point, alors elle n'est pas nulle autour de ce point.

3. Comme exemples de fonctions continues : $x \to x^2$, $x \to e^x$, $x \to \cos(x)$, $x \to \sin(x)$, $x \to |x|$, $x \to \ln x$ sur $]0, +\infty[$, $x \to \sqrt{x}$ sur $[0, +\infty[$

Propriétés 5.11. *1. Si f et g sont continues en x_0, alors $f + g$ et fg sont continues en x_0.*

2. Si f est continue en x_0 et si $f(x_0) \neq 0$, alors $\frac{1}{f}$ est continue en x_0.

3. Si f est continue en x_0, alors, pour tout réel λ, λf est continue en x_0.

4. Soit $f : I \to \mathbb{R}$ et $g : J \to \mathbb{R}$ deux fonctions telles que $f(I) \subset J$. Si f est continue en $x_0 \in I$ et si g est continue en $y_0 = f(x_0)$, alors $g \circ f$ est continue en x_0.

Définition 5.12.
- *f est continue à droite en $x_0 \in I$ si la restriction de f à $[x_0, +\infty[\cap I$ est continue en x_0 :*
$$\lim_{x \to x_0^+} f(x) = f(x_0).$$
- *f est continue à gauche en x_0 si la restriction de f à $]-\infty, x_0] \cap I$ est continue en x_0 :*
$$\lim_{x \to x_0^-} f(x) = f(x_0).$$
- *Soit $[a, b]$ inclus dans I. On dit que f est continue sur $[a, b]$ si elle est continue sur $]a, b[$, continue à droite en a et continue à gauche en b.*

Proposition 5.13. *f est continue en x_0 si et seulement si elle est continue à gauche et à droite en x_0.*

Prolongement par continuité.

Définition 5.14. *Soit $x_0 \in I$ et soit $f : I \setminus \{x_0\} \to \mathbb{R}$ une fonction telle que $\lim_{x \to x_0} f(x) = \ell$. On définit la fonction $\widetilde{f} : I \to \mathbb{R}$ par*
$$\widetilde{f}(x) = \begin{cases} f(x) & si \quad x \neq x_0 \\ \ell & si \quad x = x_0 \end{cases}$$
Alors $\widetilde{f}$ est continue en x_0 et on l'appelle le prolongement par continuité de f

Exemple

Soit $f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ avec $f(x) = x \sin\left(\frac{1}{x}\right)$. Nous avons $\lim_{x \to 0} f(x) = 0$ (Exercice : Montrer ceci avec le théorème des gendarmes). Donc
$$\widetilde{f}(x) = \begin{cases} x \sin\left(\frac{1}{x}\right) & \text{si} \quad x \neq 0 \\ 0 & \text{si} \quad x = 0 \end{cases}$$
est le prolongement par continuité de f.

5.3.2 Fonctions continues sur un intervalle

Théorème 5.15 (Théorème des valeurs intermédiaires). *Soit f une fonction continue sur un intervalle I, à valeurs réelles. Soient $a, b \in I$ et m un réel compris entre $f(a)$ et $f(b)$. Alors il existe $c \in I$, $a \leq c \leq b$ tel que $f(c) = m$.*

Exemple

Soit f une fonction continue sur $[0,1]$. Si $f(0) = -1$ et $f(1) = 1$ alors il existe $c \in [0,1]$ tel que $f(c) = 0$

5.4 Dérivabilité

Dans cette partie I désigne un intervalle de $\mathbb{R}$.

5.4.1 Définitions

Définition 5.16. *Soient $x_0 \in I$ et f une fonction définie sur I. On dit que f est dérivable en x_0 si*

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

existe et est finie.
Cette limite est alors notée $f'(x_0)$ et appelée dérivée de f en x_0.

Définition 5.17. *f une fonction définie sur I. On dit que f est dérivable sur I si f est dérivable en tout point $x_0 \in I$.*

Soit $]a, b[$ un intervalle ouvert inclus dans I. On dit que f est dérivable sur $]a, b[$ si elle est dérivable en tout point x_0 de $]a, b[$.

La fonction $x \to f'(x)$ est la fonction dérivée de f. Elle se note f' ou $\dfrac{df}{dx}$.

Remarques

1. (Rappel Lycée) La fonction $f : x \to x$ est dérivable en tout point $x_0 \in \mathbb{R}$ et $f'(x_0) = 1$. En effet
$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \frac{x - x_0}{x - x_0} = 1,$$
donc
$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = 1.$$
Ainsi $f(x) = x$ est dérivable et $f'(x) = 1$.

2. La fonction $f(x) = x^2$ est dérivable en tout point de $x_0 \in \mathbb{R}$ et $f'(x) = 2x$. En effet
$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \frac{x^2 - x_0^2}{x - x_0} = \frac{(x - x_0)(x + x_0)}{x - x_0}$$
donc
$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = 2x_0.$$
Ainsi $f(x) = x^2$ est dérivable et $f'(x) = 2x$.

3. Par changement de variable, on pose $x - x_0 = h$, $x \to x_0$ équivaut $h \to 0$, on a donc f est dérivable en x_0 si et seulement si

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

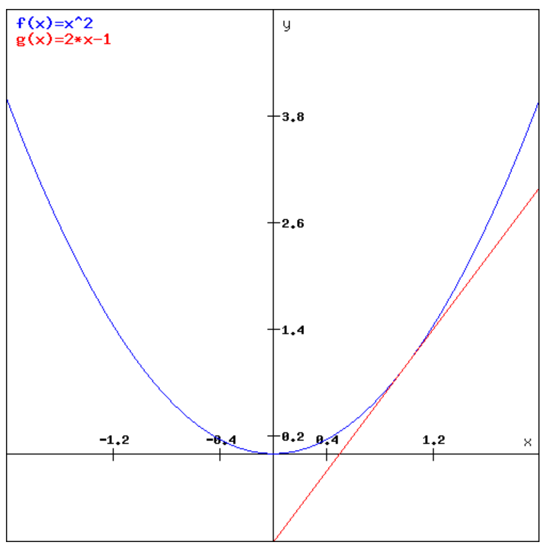
existe et est finie.

4. L'équation de la tangente à la courbe représentative de f au point $(x_0, f(x_0))$ est donnée par

$$\boxed{y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0).}$$

$f'(x_0)$ est le coefficient directeur de la tangente.

Par exemple, soit $f : x \to x^2$, donnons l'équation de la tangente à la courbe représentative de f au point $(1, f(1))$. On a $f(1) = 1$ et puisque $f'(x) = 2x$ on a $f'(1) = 2$. Donc l'équation de la tangente au point $(1, f(1)) = (1, 1)$ est $y = f'(1)(x - 1) + 1 = 2(x - 1) + 1 = 2x - 1$.



5. f est dérivable en x_0 si et seulement si il existe une fonction $\varepsilon : I \to \mathbb{R}$ continue et nulle en x_0 telle que pour tout $x \in I$:

$$f(x) = f(x_0) + (x - x_0)f'(x_0) + (x - x_0)\varepsilon(x - x_0).$$

Ce qui peut s'écrire pour tout h tel que $(x_0 + h) \in I$:

$$f(x_0 + h) = f(x_0) + hf'(x_0) + h\varepsilon(h) \quad \text{avec} \quad \lim_{h \to 0} \varepsilon(h) = 0.$$

6. (Exercice) Si f est dérivable en x_0 alors f est continue en x_0.

Quelques dérivées de fonction classiques à connaître :

f	f'
constante	0
$x^n, \quad n \geq 1$	nx^{n-1}
$\frac{1}{x}$ pour $x \neq 0$	$\frac{-1}{x^2}$
$\frac{1}{x^n}$ pour $x \neq 0\,, \quad n \geq 1$	$\frac{-n}{x^{n+1}}$
$\sqrt{x}, \quad x > 0$	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$
e^x	e^x
$\ln x, \quad x > 0$	$\frac{1}{x}$
$\cos x$	$-\sin x$
$\sin x$	$\cos x$

Exercice 110. Calculer les dérivées des fonctions suivantes tout en précisant le domaine de définition : $f(x) = e^x + \ln x^2 - \cos(x)$ et $g(x) = \sqrt{x} + \sin(x)$.

Exercice 111. Calculer les limites suivantes

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x}, \quad \lim_{x \to 0} \frac{\cos x - 1}{x}, \quad \lim_{x \to 0} \frac{\ln(1+x)}{x}, \quad \lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x}$$

Définition 5.18.

- *f est dérivable à droite en x_0 si $f_{|[x_0,+\infty[\cap I}$ est dérivable, autrement dit si*

$$\lim_{h \to 0^+} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

existe et est finie ; cette limite est alors notée $f'_d(x_0)$ et appelée dérivée de f à droite en x_0. (f est alors continue à droite en x_0.)

- *f est dérivable à gauche en x_0 si $f_{|]-\infty,x_0]\cap I}$ est dérivable, autrement dit si*

$$\lim_{h \to 0^-} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

existe et est finie ; cette limite est alors notée $f'_g(x_0)$ et appelée dérivée de f à gauche en x_0. (f est alors continue à gauche en x_0).

- *Soit $[a,b]$ inclus dans I. On dit que f est dérivable sur $[a,b]$ si elle est dérivable sur $]a,b[$, dérivable à droite en a et dérivable à gauche en b.*

Proposition 5.19. *Soit f définie sur $]a,b[$ et soit $x_0 \in]a,b[$. f est dérivable en x_0 si et seulement si elle est dérivable à droite et à gauche en x_0 et $f'_d(x_0) = f'_g(x_0)$.*

Exemple

Soit la fonction $f : x \to |x|$. On a $f'_g(0) = -1$ et $f'_d(0) = 1$ et donc f n'est pas dérivable en 0.

5.4.2 Opérations sur les dérivées

Proposition 5.20.

1. *Si f et g sont dérivables en x_0, alors $f+g$ est dérivable en x_0. On a*
$$(f+g)'(x_0) = f'(x_0) + g'(x_0).$$

2. *Si f et g sont dérivables en x_0, alors fg est dérivable en x_0. On a*
$$(fg)'(x_0) = f'(x_0)g(x_0) + f(x_0)g'(x_0).$$

3. *Si g est dérivable en x_0 et si $g(x_0) \neq 0$, alors $\frac{1}{g}$ est dérivable en x_0. On a*
$$\left(\frac{1}{g}\right)'(x_0) = -\frac{g'(x_0)}{g^2(x_0)}.$$
Si f sont dérivables en x_0 alors f/g est dérivable en x_0 et
$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x_0) = \frac{f'(x_0)g(x_0) - f(x_0)g'(x_0)}{g^2(x_0)}$$

4. *Si f est dérivable en x_0, alors, pour tout réel λ, λf est dérivable en x_0. On a*
$$(\lambda f)'(x_0) = \lambda f'(x_0).$$

5. *Soit $f : I \to \mathbb{R}$ et $g : J \to \mathbb{R}$ deux fonctions telles que $f(I) \subset J$. Si f est dérivable en x_0 et si g est dérivable en $y_0 = f(x_0)$, alors $g \circ f$ est dérivable en x_0. On a*
$$(g \circ f)'(x_0) = g'(f(x_0))\, f'(x_0).$$

Application de dérivation de fonctions composées

f	f'
$f(x) = v \circ u(x) = v(u(x))$	$u'(x)v(u(x))$
$u(x)^n, \quad n \geq 1$ Exemple : $(ax+b)^n$	$nu'(x)u(x)^{n-1}$ $na(ax+b)^{n-1}$
$\frac{1}{u(x)}, \quad u(x) \neq 0$	$\frac{-u'(x)}{u(x)^2}$
$\frac{1}{u(x)^n}, \quad u(x) \neq 0 \quad n \geq 1$	$\frac{-nu'(x)}{u(x)^{n+1}}$
$\sqrt{u(x)}, \quad u(x) > 0$	$\frac{u'(x)}{2\sqrt{u(x)}}$
$e^{u(x)}$	$u'(x)e^{u(x)}$
$\ln(u(x)), \quad u(x) > 0$ Exemple : $\ln(ax^2+b), \quad ax^2+b > 0$	$\frac{u'(x)}{u(x)}$ $\frac{2ax}{ax^2+b}$
$\cos(u(x))$ Exemple : $\cos(ax+b)$	$-u'(x)\sin u(x)$ $-a\sin(ax+b)$
$\sin(u(x))$	$u'(x)\cos(u(x))$

Exercice 112. Calculer les dérivées des fonctions suivantes tout en précisant le domaine de définition : $f(x) = e^{\cos(x)}$, $g(x) = \ln(\sin^2(x))$ et $h(x) = \tan(x)$.

5.4.3 Propriétés des fonctions dérivables

Croissance , décroissance et bijections.

Définition 5.21. *Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction. On dit que :*

- *f est croissante sur I si $\forall x, y \in I, \quad x \leq y \Longrightarrow f(x) \leq f(y)$.*
- *f est strictement croissante sur I si $\forall x, y \in I, \quad x < y \Longrightarrow f(x) < f(y)$.*
- *f est décroissante sur I si $\forall x, y \in I, \quad x \leq y \Longrightarrow f(x) \geq f(y)$.*
- *f est strictement décroissante sur I si $\forall x, y \in I, \quad x < y \Longrightarrow f(x) > f(y)$.*
- *f est monotone sur I si f est croissante ou décroissante.*
- *f est strictement monotone sur I si f est strictement croissante ou strictement décroissante.*

Proposition 5.22. *Soit f continue sur $[a, b]$ et dérivable sur $]a, b[$.*

1. *f est croissante (resp. décroissante) sur $[a, b]$ si et seulement si $\forall x \in]a, b[\quad f'(x) \geq 0$ (resp. $f'(x) \leq 0$).*
2. *Si f vérifie $\forall x \in]a, b[\quad f'(x) > 0$ (resp. $\forall x \in]a, b[\quad f'(x) < 0$) alors f est strictement croissante (resp. strictement décroissante) sur $[a, b]$.*
3. *Si f dérivable sur $]a, b[$ et vérifie $\forall x \in]a, b[$ $f'(x) = 0$, alors f est constante sur $[a, b]$.*

Définition 5.23. *Soient I et J des intervalles de $\mathbb{R}$ et soit la fonction $f : I \to J$. On dit que f est une bijection de I sur J s'il existe une application $g : J \to I$ telle que*

$$g \circ f(x) = x, \quad \forall x \in I \quad \text{et} \quad f \circ g(y) = y, \quad \forall y \in J.$$

La fonction g est la bijection réciproque de f et se note f^{-1}.

Remarques

1. Lorsque f est bijective tout élément de y de J a un et un seul antécédent par f dans I.
2. Dans un repère orthonormé la courbe représentative de f^{-1} est la symétrique de celle de f par rapport à la première bissectrice de celle de f.
3. $f : [0, +\infty[\to [0, +\infty[$, $f(x) = \sqrt{x}$ est une bijection et $f^{-1} : [0, +\infty[\to [0, +\infty[$ avec $f^{-1}(x) = x^2$.
4. $f :]0, +\infty[\to \mathbb{R}$, $f(x) = \ln x$ et $f^{-1} : \mathbb{R} \to]0, +\infty[$ avec $f^{-1}(x) = e^x$.

Théorème 5.24. *Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction définie sur un intervalle. Si f est continue et strictement monotone (strictement croissante ou strictement décroissante) alors f est une bijection de I dans l'intervalle image $J = f(I)$. Le fonction réciproque $f^{-1} : J \to I$ est continue et a le même sens de variation que f.*

(Admis sera démontré au second semestre)

Théorème 5.25. *Soient $x_0 \in I$ et $f : I \to \mathbb{R}$ une application strictement monotone et continue sur I, dérivable en x_0. Alors l'application réciproque de f, $f^{-1} : f(I) \to I$ est dérivable en $f(x_0)$ si et seulement si $f'(x_0) \neq 0$. Dans ce cas on a :*

$$\left(f^{-1}\right)'(f(x_0)) = \frac{1}{f'(x_0)}.$$

(Admis sera démontré au second semestre) Nous avons aussi la formulation équivalente suivante

$$\left(f^{-1}\right)'(y_0) \;=\; \frac{1}{f'(f^{-1}(y_0))}.$$

5.5 Fonctions logarithme et exponentielle (rappels)

Il s'agit de réviser les fonctions déjà connues : logarithme, exponentielle,

5.5.1 Logarithme népérien

On admet l'existence du *logarithme népérien* (noté ln) (ou log), unique fonction de $\mathbb{R}_+^*$ dans $\mathbb{R}$ qui s'annule en 1, dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et dont la dérivée est égale à $x \to \frac{1}{x}$.

Propriétés 5.26.

1. *La fonction* ln *est strictement croissante sur* $\mathbb{R}_+^*$
2. $\forall (x,y) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^* \quad \ln(xy) = \ln x + \ln y$
3. $\lim\limits_{x \to +\infty} \ln x = +\infty$ *et* $\lim\limits_{x \to 0^+} \ln x = -\infty$
4. $\forall x \in \mathbb{R}_+^* \quad \ln x \leq x - 1$
5. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\ln(1+x)}{x} = 1$

A démontrer :
- Pour le 2 on considère la fonction $x \mapsto \ln(xy)$ qui a la même dérivée que $x \mapsto \ln x$.
- pour le 3 on utilise l'égalité $\ln 2^n = n \ln 2$ (déjà vu au lycée).

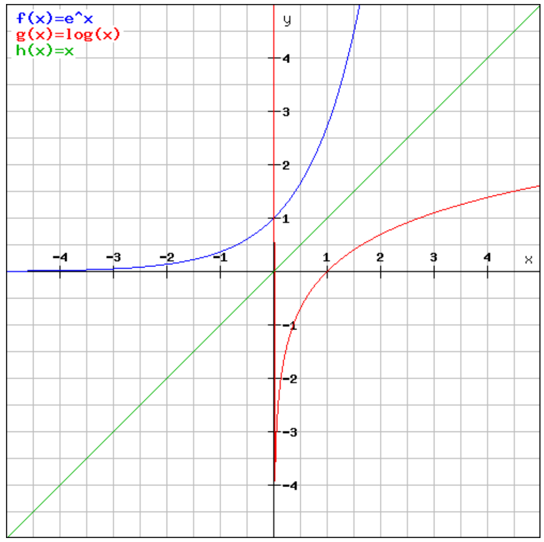
5.5.2 Exponentielle de base e

La fonction ln est continue et strictement croissante de $\mathbb{R}_+^*$ dans $\mathbb{R}$. C'est donc une bijection de $\mathbb{R}_+^*$ dans $\mathbb{R}$. La bijection réciproque est appelée *exponentielle de base e* et est notée exp ou $x \mapsto e^x$.

Propriétés 5.27.

- *La fonction exp est continue et strictement croissante de* $\mathbb{R}$ *dans* $\mathbb{R}_+^*$.
- *Elle est dérivable sur* $\mathbb{R}$ *et* $\forall x \in \mathbb{R} \quad \exp'(x) = \exp(x)$.
- $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 \quad e^{x+y} = e^x\, e^y$.
- $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{e^x - 1}{x} = 1$.

Courbe représentative de $\ln x$ et e^x



5.5.3 Fonctions puissances

Définition 5.28. *Pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$ on définit la fonction puissance f_α sur $\mathbb{R}_+^*$ par*

$$f_\alpha(x) = e^{\alpha \ln x}, \qquad x > 0.$$

On note : $f_\alpha(x) = x^\alpha$

Proposition 5.29. *Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. La fonction puissance $x \to x^\alpha$ est une fonction continue dérivable sur $]0, +\infty[$ de dérivée*

$$x \to \alpha x^{\alpha-1}.$$

Remarque

- Si $\alpha = n$, $n \geq 1$, on retrouve bien la fonction $x \to x^n = \underbrace{x \times x \ldots \times x}_{n \text{ fois}}$. En effet, lorsque $x > 0$ on a $e^{n\ln(x)} = e^{\ln(x^n)} = x^n$.
- Si $\alpha = \dfrac{1}{n}$ avec $n \geq 1$, on retrouve la fonction $x \to x^{\frac{1}{n}}$, qu'on appelle aussi la racine nième. Nous avons $(x^{\frac{1}{n}})^n = x$ ($x \to x^{1/2}$ racine carrée, $x \to x^{1/3}$ racine cubique).

Propriétés 5.30. *Soient $\alpha \in \mathbb{R}$ et $\beta \in \mathbb{R}$ et soient $x > 0$ et $y > 0$ alors*

1. $x^\alpha x^\beta = x^{\alpha+\beta}$.
2. $(x^\alpha)^\beta = x^{\alpha\beta}$.
3. $(xy)^\alpha = x^\alpha y^\alpha$

5.5.4 Croissances comparées

Proposition 5.31. *$\forall \alpha > 0$ et $\forall \beta > 0$ on a*

1. $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} \frac{(\ln x)^\alpha}{x^\beta} = 0$
2. $\displaystyle\lim_{x \to 0+} x^\beta |\ln x|^\alpha = 0$
3. $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} \frac{e^{\alpha x}}{x^\beta} = +\infty$
4. $\displaystyle\lim_{x \to -\infty} |x|^\beta e^{\alpha x} = 0$

On peut dire que la fonction puissance impose sa limite à la fonction ln, et que la fonction exp impose sa limite à la fonction puissance en $+\infty$.
$(\ln x)^\alpha$ est négligeable devant x^β au voisinage de $+\infty$....

Example 5.1. *Calculer les limites suivantes :*

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{x+1}{x^2 \ln x}, \quad \lim_{x \to 0^+} \sqrt{x} \ln(x + 2\sqrt{x}), \quad \lim_{x \to +\infty} \frac{e^{1+\sqrt{x}}}{x^{100} + 756}.$$

5.6 Fonctions circulaires et leurs réciproques

Dans cette section il s'agit : de réviser les fonctions circulaires et de découvrir de nouvelles fonctions : fonctions hyperboliques et hyperboliques réciproques, fonctions circulaires réciproques.

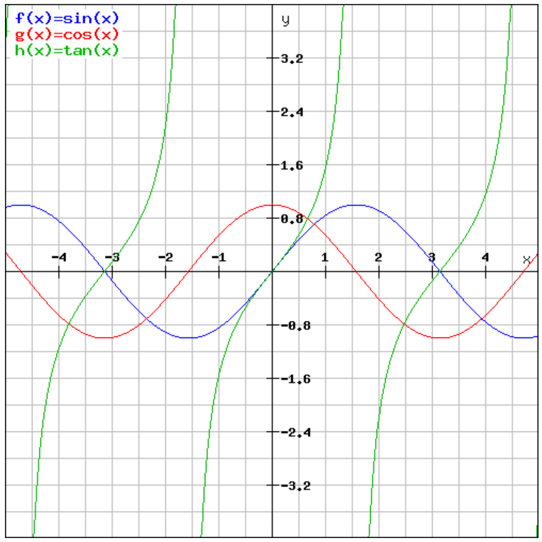
5.6.1 Fonctions circulaires

Les fonctions sinus et cosinus sont supposées connues.

Propriétés 5.32.

- *La fonction cosinus est continue sur $\mathbb{R}$, 2π-périodique, paire.*
- *La fonction sinus est continue sur $\mathbb{R}$, 2π-périodique, impaire.*
- *La fonction tangente est définie sur $\mathbb{R} \setminus \{\frac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\}$, continue sur tout intervalle ne contenant pas de réel de la forme $\frac{\pi}{2} + k\pi$ ($k \in \mathbb{Z}$), π-périodique, impaire.*
- *Les fonctions cosinus et sinus sont dérivables sur $\mathbb{R}$ et*
$$\forall x \in \mathbb{R} \quad (\sin)'(x) = \cos(x) \quad (\cos)'(x) = -\sin(x)$$
- *La fonction tangente est dérivable sur tout intervalle ne contenant pas de réel de la forme $\frac{\pi}{2} + k\pi$ ($k \in \mathbb{Z}$), et : $(\tan)'(x) = 1 + \tan^2(x) = \dfrac{1}{\cos^2(x)}$.*

Courbes représentatives de $\sin x$ *et* $\cos x$ *et* $\tan x$



5.6.2 Fonctions circulaires réciproques

I- Arc sinus.

La restriction à $\left[-\dfrac{\pi}{2}, +\dfrac{\pi}{2}\right]$ *de la fonction sinus est continue et strictement croissante sur* $\left[-\dfrac{\pi}{2}, +\dfrac{\pi}{2}\right]$. *C'est donc une bijection de* $\left[-\dfrac{\pi}{2}, +\dfrac{\pi}{2}\right]$ *dans* $[-1, +1]$. *La bijection réciproque est appelée Arc sinus et est notée* $x \mapsto \arcsin x$.

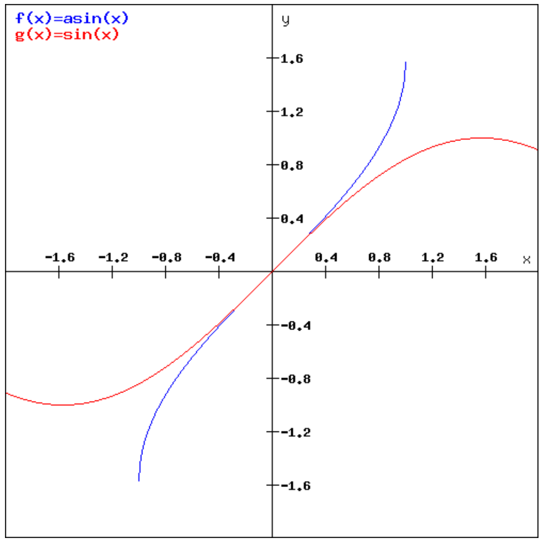
Définition 5.33. *Pour tout* $x \in [-1, +1]$, $\arcsin x$ *est l'unique élément de* $\left[-\dfrac{\pi}{2}, +\dfrac{\pi}{2}\right]$ *pour lequel le sinus est* x *:*

$$\left\{\begin{array}{lcl} y & = & \arcsin x \\ x & \in & [-1, +1] \end{array}\right. \Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{lcl} x & = & \sin y \\ y & \in & \left[-\dfrac{\pi}{2}, +\dfrac{\pi}{2}\right] \end{array}\right.$$

Propriétés 5.34. *La fonction* arcsin *est impaire.* arcsin *est continue et strictement croissante sur* $[-1, +1]$.
Elle est dérivable sur $]-1, +1[$ *et*

$$(\arcsin)'(x) = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}.$$

Courbe représentative de $\sin x$ *et* $\arcsin x$.



II- Arc cosinus.

La restriction à $[0, +\pi]$ *de la fonction cosinus est continue et strictement décroissante sur* $[0, +\pi]$. *C'est donc une bijection de* $[0, +\pi]$ *dans* $[-1, +1]$. *La bijection réciproque est appelée Arc cosinus et est notée* $x \mapsto \arccos x$.

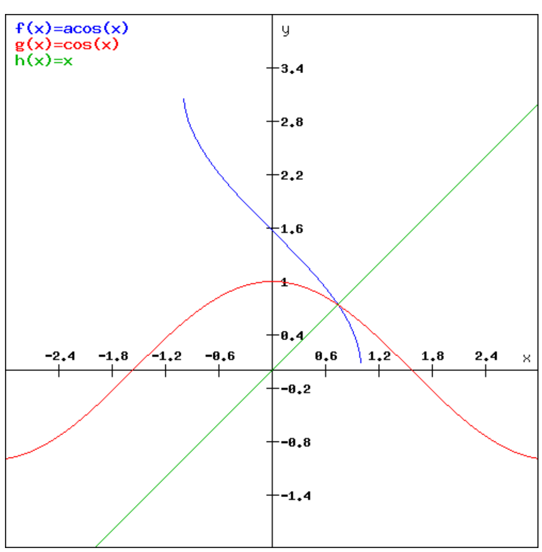
Définition 5.35. *Pour tout* $x \in [-1, +1]$, $\arccos x$ *est l'unique élément de* $[0, +\pi]$ *pour lequel le cosinus est* x *:*

$$\left\{ \begin{array}{lll} y & = & \arccos x \\ x & \in & [-1, +1] \end{array} \right. \Longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{lll} x & = & \cos y \\ y & \in & [0, +\pi] \end{array} \right.$$

Propriétés 5.36. *La fonction* $\arccos$ *est continue et strictement décroissante sur* $[-1, +1]$.
Elle est dérivable sur $]-1, +1[$ *et*

$$(\arccos)'(x) = -\frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}.$$

Courbe représentative de $\cos x$ *et* $\arccos x$.



III- Arc tangente.

La restriction à $\left]-\frac{\pi}{2},+\frac{\pi}{2}\right[$ *de la fonction tangente est continue et strictement croissante sur* $\left]-\frac{\pi}{2},+\frac{\pi}{2}\right[$. *Ses limites aux bornes sont* $+\infty$ *et* $-\infty$, *en effet* $\lim_{x\to-\frac{\pi}{2}} \tan x = -\infty$ *et* $\lim_{x\to+\frac{\pi}{2}} \tan x = +\infty$. *C'est donc une bijection de* $\left]-\frac{\pi}{2},+\frac{\pi}{2}\right[$ *dans* $\mathbb{R}$. *La bijection réciproque est appelée Arc tangente et est notée* $x \mapsto \arctan x$.

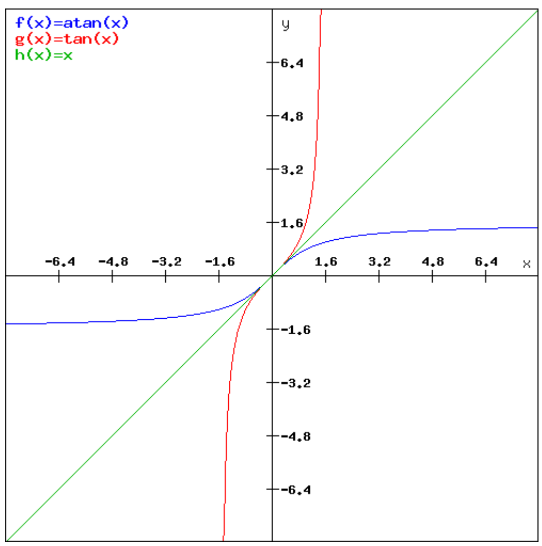
Définition 5.37. *Pour tout* $x \in \mathbb{R}$, $\arctan x$ *est l'unique élément de* $\left]-\frac{\pi}{2},+\frac{\pi}{2}\right[$ *pour lequel la tangente est* x :

$$\left\{\begin{array}{lcl} y & = & \arctan x \\ x & \in & \mathbb{R} \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{lcl} x & = & \tan y \\ y & \in & \left]-\frac{\pi}{2},+\frac{\pi}{2}\right[\end{array}\right.$$

Propriétés 5.38. *La fonction* $\arctan$ *est impaire.* $\arctan$ *est continue et strictement croissante sur* $\mathbb{R}$. *Elle est dérivable sur* $\mathbb{R}$ *et*

$$(\arctan)'(x) = \frac{1}{1+x^2}.$$

Courbe représentative de $\tan x$ *et* $\arctan x$.



5.7 Fonctions hyperboliques

5.7.1 Fonctions hyperboliques

Définition 5.39.

1. *On appelle sinus hyperbolique et cosinus hyperbolique la partie impaire et la partie paire de la fonction exponentielle de base e. C'est-à-dire :*

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad \sinh x := \frac{e^x - e^{-x}}{2} \quad \text{et} \quad \cosh x := \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

2. *On appelle tangente hyperbolique la fonction définie sur* $\mathbb{R}$ *par :*

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad \tanh x = \frac{\sinh x}{\cosh x}$$

Propriétés 5.40. $\forall x \in \mathbb{R} \quad \cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$

Ces trois fonctions sont dérivables sur $\mathbb{R}$ *:*

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad (\sinh)'(x) = \cosh x \quad , \quad (\cosh)'x = \sinh x \quad \text{et} \quad (\tanh)'x = 1 - \tanh^2 x = \frac{1}{\cosh^2 x}.$$

5.8 Exercices

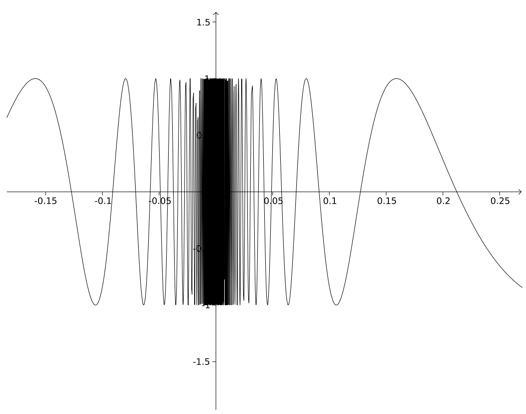
5.8.1 Généralités sur les fonctions

Exercice 113. Déterminer les domaines de définition des fonctions suivantes

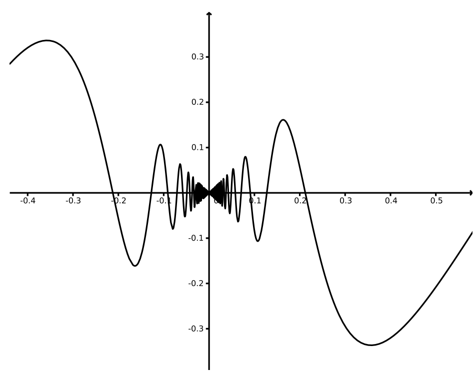
$$f(x) = \sqrt{\frac{2+3\,x}{5-2\,x}}\,; \quad g(x) = \sqrt{x^2 - 2\,x - 5}\,; \quad h(x) = \ln(4\,x+3)\,.$$

5.8.2 Définition de limite

Exercice 114. On considère les représentations graphiques suivantes



(a)



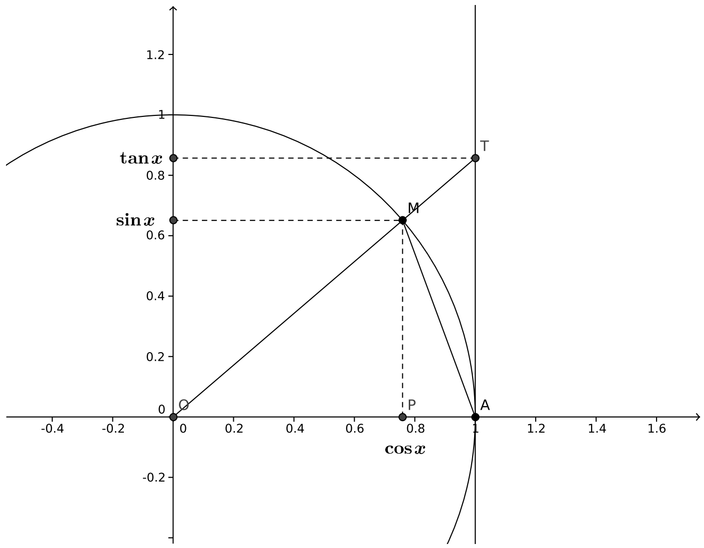
(b)

1. Avec le graphique que conjecturez-vous en terme de limite lorsque x tend vers 0 pour ces deux fonctions représentées graphiquement ?
2. Dire s'il s'agit de $x \mapsto \cos(1/x)$, $x \mapsto \sin(1/x)$, $x \mapsto \dfrac{\cos(x)}{x}$, $x \mapsto \dfrac{\sin(x)}{x}$, $x \mapsto x\cos(1/x)$, $x \mapsto x\sin(1/x)$.
3. Comment peut-on montrer qu'une fonction ne tend pas vers 0 lorsque x tend vers 0 ? Démontrer que la fonction représentée au graphique (a) ne tend pas vers 0 lorsque x tend vers 0.
4. Démontrer la conjecture faite pour la fonction représentée au graphique (b).

5.8.3 Calcul de limite

Exercice 115. Une limite connue.

Soit x un réel de $]0, \frac{\pi}{2}[$. Dans le plan rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \vec{i}, \vec{j})$, on considère les points $A(1,0)$, $M(\cos x, \sin x)$, $P(\cos x, 0)$ et $T(1, \tan x)$. Soit A_1 l'aire du triangle OAM, A_2 l'aire du secteur de disque OAM et A_3 l'aire du triangle OAT.



1. On admet que l'aire A_2 du secteur de disque OAM est proportionnelle à x, donner son expression en fonction de x.
2. En comparant les aires prouver que $\sin x \leq x \leq \tan x$.
3. En déduire que $\cos x \leq \dfrac{\sin x}{x} \leq 1$.
4. Déterminer la limite en 0 de $f(x) = \dfrac{\sin x}{x}$ (distinguer les deux cas $x < 0$ et $x > 0$).

Exercice 116. Déterminer les limites quand elles existent des fonctions suivantes dans les conditions indiquées :

1. $\dfrac{3x^3 + 7x^2 + 2x}{x^3 - 4x}$ en $+\infty$, $-\infty$, 0, 2, -2.
2. $\dfrac{x - \sqrt{x^2+1}}{2x - \sqrt{4x^2+1}}$ en $+\infty$
3. $\dfrac{\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}}{x}$ en 0
4. $\dfrac{x^2 - 4}{x^2 - 3x + 2}$ en 2
5. $\dfrac{\sqrt{1+x} - \sqrt{1+x^2}}{x}$ en 0
6. $\dfrac{x-1}{x^n - 1}$ en 1

5.8.4 Définition de la continuité

Exercice 117. La fonction f définie par

$$f(x) = x \cos\left(\frac{1}{x}\right), \text{ si } x \neq 0$$

admet-elle un prolongement par continuité en 0 ?

Exercice 118. On considère la fonction suivante :

$$f : x \mapsto \begin{cases} -x^2 & \text{si} \quad x < 0 \\ c & \text{si} \quad x = 0 \\ ax + b & \text{si} \quad x > 0 \end{cases}$$

Existe-t-il des réels a, b, c pour lesquels f est continue sur $\mathbb{R}$?

Exercice 119. On considère la fonction suivante :

$$f\,:\; x \mapsto \begin{cases} \sqrt{1-x^2} & \text{si} \quad \mid x \mid < 1 \\ ax^2+bx+c & \text{si} \quad \mid x \mid \geq 1 \end{cases}$$

Existe-t-il des réels a, b, c pour lesquels f est continue sur $\mathbb{R}$?

Exercice 120. Soit f définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = \frac{1}{1+x^2}.$$

1. Montrer que f réalise une bijection de $[0, +\infty[$ sur un intervalle que l'on précisera.
2. Déduire des propriétés de f celles de f^{-1}.
3. Déterminer explicitement f^{-1}.

5.8.5 Définition de la dérivée en un point

Exercice 121. La fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$:

$$x \mapsto |x-1|$$

est-elle continue aux points 0, 1 et 2 ? Est-elle dérivable en ces points ?

Exercice 122. Déterminer $a, b \in \mathbb{R}$ de manière à ce que la fonction f définie sur $\mathbb{R}_+$ par :

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{x} & \text{si} \quad 0 \leq x \leq 1, \\ ax^2+bx+1 & \text{si} \quad x > 1. \end{cases}$$

soit continue $\mathbb{R}_+$, soit dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$.

Exercice 123. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x = 0, \\ x^2 \sin(1/x) & \text{si } x \neq 0. \end{cases}$$

1. Montrer que
$$|f(x)| \leq x^2$$
pour tout x. En déduire que f est continue sur $\mathbb{R}$.
2. Montrer que f est dérivable sur $]-\infty, 0[$ et $]0, +\infty[$, avec $f'(x) = 2x\sin(1/x) - \cos(1/x)$ pour $x \neq 0$.
3. Montrer que f est dérivable en 0.
4. Expliquer pourquoi $\cos(1/x)$ n'admet pas de limite pour $x \to 0$, et en déduire que $f'(x)$ n'admet pas de limite quand $x \to 0$.

5.8.6 Calculs de dérivées

Exercice 124. Calculer les dérivées des fonctions suivantes, après avoir indiqué sur quels intervalles elles sont dérivables :

$$f(x) = \sqrt{x^2-12}, \qquad g(x) = \cos^3(x)\sin^2(x),$$

$$h(x) = \frac{3-5x^4}{x^3-x^2+x-1} \qquad k(x) = (\tan x)^5$$

Exercice 125. 1. Montrer que si une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ est paire, sa dérivée est impaire.

2. Montrer que si une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ est impaire, alors $f(0) = 0$ et la dérivée est paire.

5.8.7 Calcul de limites

Exercice 126. Calculer les limites suivantes :

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin(x^2)}{x},\quad \lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{x+1}-1}{x},\quad \lim_{x\to 1}\frac{\sin(\pi x)}{x-1},\quad \lim_{x\to 0}\frac{e^{2x}-1}{x},\quad \lim_{x\to 1}\frac{e^x-e}{x-1}$$

5.8.8 Etude de fonction

Exercice 127. On considère la fonction f définie sur $I=\left]0,\frac{\pi}{2}\right[$ par

$$f(x)=\frac{1}{x\tan x}$$

1. Montrer que la fonction f est une bijection de I sur un intervalle J que l'on précisera.
2. Soit g sa fonction réciproque. La fonction g est-elle continue sur J ? Est-elle dérivable sur J ?

5.8.9 Fonctions logarithme, exponentielle et puissances

Exercice 128. Calculer les limites suivantes

$$\lim_{x\to+\infty}(1+\frac{1}{2x})^x,\quad \lim_{x\to 0}\frac{5^x-1}{x},\quad \lim_{x\to+\infty}x(3^{\frac{1}{x}}-1),$$

$$\lim_{x\to+\infty}(1+\frac{r}{x})^x,$$

avec r réel quelconque.

Exercice 129. 1. Etudier les variations de la fonction f définie par $f(x)=x^x$.

2. Déterminer suivant les valeurs de m le nombre de solutions de l'équation $x^x=m$.

Exercice 130. Calculer les dérivées des fonctions suivantes, après avoir indiqué sur quels intervalles elles sont dérivables :

$$f(x)=e^{\cos(\sin(x))},\quad f(x)=\ln(\sin(x)),\quad f(x)=\ln(\ln(x)),\quad u(x)=(x^3+1)^{\frac{3}{2}}\quad ,$$

$$f(x)=\frac{\sqrt{x}}{e^x+1},\quad f(x)=\exp(x^3-2x+1),\quad f(x)=(a\cos\omega x\ +\ b\sin\omega x)e^{cx}$$

Exercice 131. Déterminer les limites en $+\infty$, quand elles existent, des fonctions suivantes :

$$\sqrt{x}-x,\quad e^{\sqrt{x}-x},\quad \frac{\ln(1+x)}{\ln(x)},\quad \frac{x-2\ln(x)}{e^x-1}.$$

Exercice 132. Calculer les limites suivantes

1. $\displaystyle\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{\sin x-\frac{\sqrt{2}}{2}}{x-\frac{\pi}{4}}.$

2. $\displaystyle\lim_{x\to\frac{1}{2}}\frac{e^{2x}-e}{2x-1}.$

3. $\displaystyle\lim_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{x^2+3}-x+2}{x}.$

4. $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\sqrt{x^2+3}-x+2}{x}$.

Exercice 133. Calculer les limites suivantes :

$$\lim_{x\to 1}\frac{\ln(x)}{x-1}, \quad ; \lim_{x\to 0}\frac{e^{x^2}-1}{x}, \quad ; \lim_{x\to+\infty} x(\ln(x+1)-\ln(x)), \quad \lim_{x\to 1}\frac{x^{\frac{1}{5}}-1}{x^4-1}, \quad \lim_{x\to+\infty} x^{\frac{1}{1+2\ln x}}.$$

Exercice 134. 1. Quel est le domaine de définition de la fonction

$$f:\ x\mapsto x^{\frac{1}{x}}$$

La fonction f admet-elle une limite à droite en 0 ? Donner le tableau de variations de f.

2. Résoudre l'équation $f(x)=\sqrt{2}$.

3. Soit g la restriction de f à l'intervalle $[e,+\infty[$. Montrer que g admet une fonction réciproque. Calculer $g^{-1}(\sqrt{2})$ et $\left(g^{-1}\right)'(\sqrt{2})$.

5.8.10 Fonctions circulaires et leurs réciproques

Exercice 135. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=-4x^3+3x+\dfrac{1}{2}$.

1. Faire l'étude de la fonction (avec tableau de variation) et tracer la courbe représentative de f.
2. Trouver les solutions dans $[0,2\pi]$ de l'équation $\sin(3x)=-\dfrac{1}{2}$.
3. Montrer que pour tout réel x, $\sin(3x)=3\sin(x)-4\sin^3(x)$.
4. En déduire les solutions de l'équation $f(x)=0$.

Exercice 136. Montrez que si l'on pose $t=\tan(x/2)$, $x/2\neq\pi/2+k\pi$, $k\in\mathbb{Z}$, on a

$$\cos x=\frac{1-t^2}{1+t^2},\quad \sin x=\frac{2t}{1+t^2},\quad \tan x=\frac{2t}{1-t^2}\quad \text{pour } x\neq\pi/2+k\pi,\ k\in\mathbb{Z}$$

Exercice 137. Calculer les limites suivantes :

$$\lim_{x\to 1}\operatorname{Arctan}\frac{1}{x-1}\quad ,\quad \lim_{x\to\frac{1}{2}}\frac{\operatorname{Arccos}x-\frac{\pi}{3}}{4x^2-1}.$$

Exercice 138. 1. Calculer :

$$\operatorname{Arcsin}\frac{\sqrt{3}}{2}\quad ;\quad \operatorname{Arccos}\frac{-1}{2}\quad ;\quad \operatorname{Arctan}\frac{-1}{\sqrt{3}}$$

$$\operatorname{Arcsin}\left(\sin\frac{5\pi}{6}\right)\operatorname{Arccos}\left(\cos\frac{5\pi}{6}\right)\quad ;\quad \sin\left(\operatorname{Arcsin}1\right)$$

$$\operatorname{Arcsin}\left(\sin 1\right)\quad ;\quad \tan\left(\operatorname{Arctan}3\right)\quad ;\quad \operatorname{Arctan}\left(\tan 3\right).$$

Exercice 139. Donner une autre expression mathématique de

$$\sin\left(\operatorname{Arccos}x\right)\quad ,\quad \cos\left(\operatorname{Arcsin}x\right)\quad ,\quad \tan\left(\operatorname{Arcsin}x\right)$$

Exercice 140. Etudier la fonction définie par : $f(x)=\operatorname{Arcsin}\left(\sin x\right)$

Exercice 141. Montrer que pour tout $x\in[-1,1]$, $\quad \operatorname{Arcsin}x+\operatorname{Arccos}x=\dfrac{\pi}{2}$

Exercice 142. 1. Déterminer les domaines de définition, de dérivabilité, et les dérivées des fonctions suivantes :

$$f(x) = \operatorname{Arcsin}\left(\sqrt{x}\right) \quad , \quad h(x) = \operatorname{Arctan}\left(x^2 - 1\right).$$

2. Simplifier, suivant les valeurs de x l'expression :

$$g(x) = \operatorname{Arctan} x + \operatorname{Arctan} \frac{1}{x}.$$

Exercice 143. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = \begin{cases} \operatorname{Arctan} x & \text{si} \quad x < 0 \\ 0 & \text{si} \quad x = 0 \\ e^{-\frac{1}{x}} & \text{si} \quad x > 0 \end{cases}$$

1. Etudier la continuité de f sur $\mathbb{R}$.
2. Déterminer l'ensemble D des réels x tels que f soit dérivable en x.

Pour x appartenant à D, calculer $f'(x)$.

Exercice 144. Etudier la fonction

$$x \mapsto \operatorname{Arcsin} \frac{2x}{1+x^2}$$

La comparer à la fonction $x \mapsto \operatorname{Arctan} x$.

Exercice 145. Soit

$$f(x) = \cos(\operatorname{Arctan}(2x+1)).$$

1. Déterminer l'ensemble de définition de f et étudier ses limites en $\pm\infty$. Calculer $f(-1)$.
2. Résoudre l'équation $f(x) = 1/\sqrt{2}$.
3. Montrer que la restriction de f à $[-1/2, +\infty[$ possède une fonction réciproque g.
4. Calculer $g'(\sqrt{2}/2)$.

Exercice 146. Soit la fonction définie par

$$f(x) = \operatorname{Arctan}\left(\frac{1+x}{1-x}\right).$$

1. Déterminer le domaine de définition D de f.
2. Calculer les limites de f aux extémités des intervalles de D.
3. Peut-on prolonger f par continuité sur $[1, +\infty[$, sur $]-\infty, 1]$, et sur $\mathbb{R}$?
4. Montrer que f est dérivable et calculer sa dérivée f'.
5. Déduire des questions précédentes une expression simple de $f(x)$ sur $]1, +\infty[$ en fonction de $\operatorname{Arctan} x$.
6. Dresser le tableau de variation de la fonction f sur $]1, +\infty[$ et dessiner le graphe de f.

5.8.11 Fonction hyperboliques

Exercice 147. Résoudre l'équation :

$$2\cosh x + 3\sinh x = 1$$

Exercice 148. Calculer

$$\lim_{x \to +\infty} [\ln(\cosh x) - x]$$

Exercice 149. Calculer la dérivée de la fonction suivante, après avoir indiqué sur quels intervalles elle est dérivable :

$$f(x) = \frac{1 - \cosh(x)}{2 + \sinh(x)}.$$

6 Intégration, calcul de primitives

6.1 Définition

Soit f une fonction définie sur un intervalle $[a,b]$ (avec $a < b$). On rappelle que le *graphe* de f l'ensemble des points (x,y) de $\mathbb{R}^2$ qui vérifient $x \in [a,b]$ et $y = f(x)$.

On suppose que la fonction f est positive. Le *sous-graphe* de f est l'ensemble

$$\mathrm{SG}(f) := \{(x,y) \in [a,b] \times \mathbb{R}\,;\, 0 \leq y \leq f(x)\}\,.$$

Si on note par $\mathcal{C}_f$ la courbe représentative de la fonction f, le sous-graphe de f est délimitée par $\mathcal{C}_f$ et les droites d'équation $x = a$ et $x = b$. Le sous-graphe d'une fonction continue positive sur un segment $[a,b]$ est un exemple très important d'ensemble que l'on sait mesurer.

Définition 6.1. *Soit f une fonction continue positive sur $[a,b]$ L'intégrale de a à b de la fonction f notée $\int_a^b f(x)dx$ est définie par l'aire du sous-graphe de f*

$$\int_a^b f(t)dt = \mathrm{Aire}\,(\mathrm{SG}(f))$$

C'est l'aire délimitée par l'axe des abscisses, les droites d'équation $x = a$ et $x = b$ et la courbe $\mathcal{C}_f$.

Lorsque la fonction f est négative, le sous-graphe de f est l'ensemble

$$\mathrm{SG}(f) := \{(x,y) \in [a,b] \times \mathbb{R}\,;\, f(x) \leq y \leq 0\}\,.$$

Définition 6.2. *Soit f une fonction continue négative sur $[a,b]$ L'intégrale de a à b de la fonction f notée $\int_a^b f(x)dx$ est définie par l'opposée de l'aire du sous-graphe de f*

$$\int_a^b f(t)dt = -\mathrm{Aire}\,(\mathrm{SG}(f))$$

C'est l'aire délimitée par l'axe des abscisses, les droites d'équation $x = a$ et $x = b$ et la courbe $\mathcal{C}_f$.

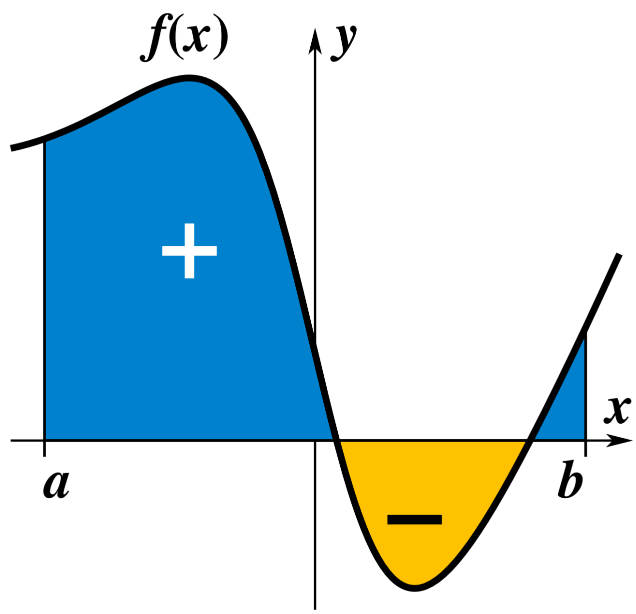
Toute fonction réelle continue f sur un intervalle $[a,b]$ s'écrit comme la différence de deux fonctions positives continues sur $[a,b]$

$$f = f^+ - f^-$$

avec $f^+ := \max(f(x), 0)$ et $f^-(x) := \sup(-f(x), 0)$ [1]. Ceci nous permet de définir la notion d'intégrale de f sur $[a,b]$ (en remarquant que f s'écrit $f = f^+ - f^-$ sur $[a,b]$).

Définition 6.3. *Soit f est une fonction continue de $[a,b]$. L' intégrale de a à b de la fonction f sur $[a,b]$, notée $\int_a^b f(t)dt$ est définie par*

$$\int_a^b f(t)dt = \text{Aire}\left(\text{SG}\left(f^+\right)\right) - \text{Aire}\left(\text{SG}\left(f^-\right)\right).$$



Montrer que $\int_1^1 xdx = 0$.

On en déduit de cette définition la proposition suivante

1. $\max(a,b) = \begin{cases} a & \text{si } a \geq b \\ b & \text{si } a \leq b \end{cases}$

Proposition 6.4. *Soient $a \leq b$ et f et g deux fonctions continues sur $[a, b]$. Alors*

1. *(définition)* $\displaystyle\int_b^a f(t)\,dt := -\int_a^b f(t)\,dt$,
2. $\displaystyle\int_a^a f(t)\,dt = 0$,
3. $\displaystyle\int_a^b f(t)\,dt + \int_a^b g(t)\,dt = \int_a^b (f(t) + g(t))\,dt$,
4. *Pour tout* $\lambda \in \mathbb{R}$, $\displaystyle\int_a^b \lambda f(t)dt = \lambda \int_a^b f(t)dt$.
5. *Relation de Chasles. Pour tout* α, β, γ *de* $[a, b]$
$$\int_\alpha^\beta f(t)\,dt = \int_\alpha^\gamma f(t)\,dt + \int_\gamma^\beta f(t)\,dt\,,$$
6. *si* $f \geq 0$ *sur* $[a, b]$ *alors* $\displaystyle\int_a^b f(t)\,dt \geq 0$
7. *Si* $f \leq g$ *sur* $[a, b]$ *alors* $\displaystyle\int_a^b f(t)\,dt \leq \int_a^b g(t)\,dt$,
8. $\displaystyle\left|\int_a^b f(t)\,dt\right| \leq \int_a^b |f(t)|\,dt$.

Remarque

$\displaystyle\left|\int_a^b f(t)\,dt\right| \leq \int_a^b |f(t)|\,dt$ n'est pas vraie pour $b < a$.

6.2 Primitive d'une fonction continue

Définition 6.5. *F et f sont deux applications définies sur I. On dit que F est une primitive de f sur I si F est dérivable sur I et*
$$\forall x \in I, \qquad F'(x) = f(x).$$

Remarque

On peut trouver dans les livres la notation $\displaystyle\int f(x)dx$ pour désigner une primitive de f.

Théorème 6.6 (Théorème fondamental de l'analyse.)**.** *Soit f une fonction continue sur un intervalle ouvert I de $\mathbb{R}$, à valeurs réelles, et soit a un point de I.*

- *La fonction*
$$F\ : x \in I \longmapsto \int_a^x f(t)\,dt$$
est une primitive de f sur I ; c'est <u>la</u> primitive de f qui s'annule en a.
- *Pour toute primitive F_0 de f sur I, l'ensemble des primitives de f sur I est $\{F_0 + C\,;\, C \in \mathbb{R}\}$.*

D'où l'existence de la fonction ln admise au chapitre 7.

Corollaire 6.7. *Soit f une fonction à valeurs réelles définie et dérivable sur un intervalle ouvert I. On suppose de plus que sa dérivée est continue sur I ($f \in \mathcal{C}^1(I)$). Si $[a,b] \subset I$, on a*

$$\int_a^b f'(t)\,dt = f(b) - f(a)\,.$$

On utilisera la notation suivante $\big[f(x)\big]_a^b = f(b) - f(a)$. Une application majeure de ce résultat :

6.2.1 Formule d'intégration par parties.

Proposition 6.8. *Soient f et g deux fonctions à valeurs réelles dérivables sur un intervalle ouvert I de $\mathbb{R}$, à dérivées continues sur I ; on a, si $[a,b] \subset I$,*

$$\int_a^b f'(t)g(t)\,dt = \big(f(b)g(b) - f(a)g(a)\big) - \int_a^b f(t)g'(t)\,dt = \Big[fg\Big]_a^b - \int_a^b f(t)g'(t)\,dt.$$

Calculer $\displaystyle\int_1^2 \ln t dt$. On pose $g(t) = \ln t$ et $f'(t) = 1$ donc $g'(t) = \dfrac{1}{t}$ et $f(t) = t$. La formule d'intégration par parties nous donne

$$\int_1^2 \ln t\; dt = \Big[t\ln t\Big]_1^2 - \int_1^2 t \times \frac{1}{t}dt = 2\ln 2 - 1\ln 1 - \int_1^2 dt = 2\ln 2 - 1.$$

Autre application très importante :

6.2.2 Changement de variable.

Proposition 6.9. *Soit f une fonction continue sur un intervalle I de $\mathbb{R}$. Soit u une fonction dérivable et de dérivée continue sur $[a,b]$ à valeurs dans I. On a :*

$$\int_a^b f(u(x))u'(x)dx \;=\; \int_{u(a)}^{u(b)} f(t)dt.$$

On dit qu'on a fait le changement de variable $t = u(x)$ (et donc $dt = u'(x)dx$).

Remarque

1. Si on part de $\displaystyle\int_c^d f(t)\,dt$ et que l'on veut faire le changement de variable $t = u(x)$, il faut se placer sur un intervalle où u est bijective et alors

   $$\int_c^d f(t)dt = \int_{u^{-1}(c)}^{u^{-1}(d)} f(u(x))u'(x)dx.$$

   On se placera

2. De façon mécanique on "remplace dt par $u'(x)dx$" et "t par $u(x)$ (autrement $x = u^{-1}(t)$) t varie de c à d donc x varie de $u^{-1}(c)$ à $u^{-1}(d)$

6.3 Calculs d'intégrales et calculs de primitives

Voici un tableau regroupant les primitives des fonctions usuelles ; il est obtenu par une lecture inverse de celui des dérivées.

f	Primitive F	sur
$f(x) = 0$	$F(x) = c$	$\mathbb{R}$
$f(x) = k$	$F(x) = kx + c$	$\mathbb{R}$
$f(x) = e^x$	$F(x) = e^x + c$	$\mathbb{R}$
$f(x) = x^\alpha, \alpha \neq -1$	$F(x) = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + c$	$]0; +\infty[$
$f(x) = \frac{1}{x}$	$F(x) = \ln\|x\| + c$	$]-\infty, 0[$ ou $]0, +\infty[$
$f(x) = \frac{1}{x+a}, a \geq 0$	$F(x) = \ln\|x+a\| + c$	$]-\infty, -a[$ ou $]-a, +\infty[$
$f(x) = \sin x$	$F(x) = -\cos x + c$	$\mathbb{R}$
$f(x) = \cos x$	$F(x) = \sin x + c$	$\mathbb{R}$
$f(x) = \frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x$	$F(x) = \tan x + c$	$]-\frac{\pi}{2} + k\pi; \frac{\pi}{2} + k\pi[, \quad k \in \mathbb{Z}$
$f(x) = \frac{1}{1+x^2}$	$F(x) = \arctan x$	$\mathbb{R}$

Calculer les primitives de

1. $f(x) = x^n$ pour $n \in \mathbb{N}^*$ sur $\mathbb{R}$,
2. $f(x) = \frac{1}{x^{n+1}}$ pour $n \geq 1$ sur $]-\infty; 0[$ ou $]0; +\infty[$,
3. $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$ sur $]0; +\infty[$.
4. Calculer

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(x)dx \quad \int_1^2 (\frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{1}{x})dx \quad \int_1^2 (x + e^x)$$

$$\int_0^1 \frac{dx}{1+x}, \quad \int_0^1 \frac{dx}{(1+x)^2}, \quad \int_0^1 \frac{dx}{1+x^2}.$$

Utilisation des formules de dérivation

En inversant les formules de dérivation des fonctions composées, on aura le tableau suivant (Attention, ces formules sont à comprendre sur des intervalles où les fonctions sont bien définies) completer le tableau suivant :

f	primitive F
$f(x) = u'(x)v'(u(x))$	$F(x) = v(u(x)) + = v \circ u(x) + c$
$f(x) = u'(ax+b)$	
$f(x) = \sin(ax+b)$	
$f(x) = \cos(ax+b)$	
$f(x) = u'(x)e^{u(x)}$	
$f(x) = u'(x) \times (u(x))^n, \quad n \in \mathbb{N}^*$	
$f(x) = \frac{u'(x)}{(u(x))^{n+1}}, \quad n \geqslant 1$ entier	
$f(x) = \frac{u'(x)}{\sqrt{u(x)}} = u'(x)(u(x)^{-\frac{1}{2}}$	
$f(x) = u'(x)u(x)^\alpha, \alpha \neq -1$	
$f(x) = \frac{u'(x)}{u(x)}$	
$f(x) = u'(x)\sin(u(x))$	
$f(x) = u'(x)\cos(u(x))$	

Nota bene

Toute les formules qui précédent ne sont que des cas particuliers de la dernière ligne : la primitive de $f(x) = u'(x)v(u(x))$ est $F(x) = v(u(x)) = v \circ u(x)$.

6.4 Exercices

Exercice 150. Donner le primitives de

$$\int x^3 dx, \qquad \int \frac{dx}{x^2} \int \frac{dx}{\sqrt{x}} \quad \int \frac{dx}{x\sqrt{x}} \quad \int \sin x$$

Exercice 151.

1. Représenter graphiquement sur $[-1, 2]$ la fonction $x \to |x|$ puis calculer de deux façons différentes $\int_{-1}^{2} |x|\, dx$.
2. Représenter graphiquement sur $[-2, 2]$ la fonction $x \to x^2 - 1$ et $x \to |x^2 - 1|$. Calculer $\int_{-2}^{2} |x^2 - 1|\, dx$.
3. Trouver une primitive de
   (a) $x \to \dfrac{1}{\cos^2(x)}$ en précisant les intervalles possibles de définition ;
   (b) $x \to \sqrt{x}$ et $x \to 5^x$ sur $]0, +\infty[$.

Exercice 152. Donner les primitives de

1. $f(x)$ de la forme $u'(x)u^\alpha(x)$ avec α réel :
   (a) $\displaystyle\int \frac{\ln x}{x}\, dx$ sur $]0, +\infty[$,
   (b) $\displaystyle\int x^4(1 + x^5)^5\, dx$,
   (c) $\displaystyle\int \sin\frac{x}{2} \cos\frac{x}{2}\, dx$,
   (d) $\displaystyle\int \tan(x)\, dx$ sur $]-\frac{\pi}{2}, +\frac{\pi}{2}[$.
   (e) $\displaystyle\int \frac{1}{x^2} e^{-\frac{1}{x}}\, dx$,
   (f) $\displaystyle\int \sin^3 t \cos t\, dt$,
   (g) $\displaystyle\int \frac{\sin x}{(\cos x)^{\frac{4}{5}}} dx$ sur $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$,
   (h) $\displaystyle\int \frac{x^3}{\sqrt{1 - x^4}}\, dx$.
2. $f(x)$ de la forme $u'e^u$:
   (a) $\displaystyle\int e^{1-3x}\, dx$,
   (b) $\displaystyle\int xe^{x^2}\, dx$,
   (c) $\displaystyle\int \frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}\, dx$ sur $]0, +\infty[$.

Exercice 153. Donner les primitives de $f(x)$ de la forme précédente après une transformation :

$$\int \frac{x^2}{1+x^2}\,dx, \qquad \int \frac{\cos^3 x}{\sin^5 x}dx, \qquad \int \cos^2 x\,dx$$

6.5 Intégration par parties

Exercice 154. Calculer, en intégrant par parties,

$$\int_0^2 (3x+2)e^{-x}\,dx, \qquad \int_0^{\frac{\pi}{3}} t\cos t\,dt, \qquad \int_0^1 \frac{t}{\sqrt{t+1}}\,dt.$$

.

$$\int_0^1 x^2e^x\,dx, \quad \int_0^x e^t\cos t\,dt, \quad \int_0^\pi t^2\cos t\,dt, \quad \int_1^2 x^2\ln x\,dx,$$

$$\int_0^\pi \cos^3 x\,dx, \quad \int_1^2 \ln t\,dt, \quad \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{x}{\cos^2 x}\,dx$$

Exercice 155. Soit n un entier naturel non nul. On pose

$$I_n = \int_1^e x^2(\ln x)^n\,dx$$

1. Calculer I_1 (*faire une intégration par parties*).
2. Montrer que pour tout $n > 0$, on a

$$I_{n+1} = \frac{e^3}{3} - \frac{n+1}{3}I_n.$$

Exercice 156. Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose

$$I_n = \int_0^1 x^n e^{x^2}\,dx$$

1. Trouver une relation entre I_{n+2} et I_n. On pourra faire une intégration par parties en remarquant que $x^{n+2}e^{x^2} = x^{n+1} \times xe^{x^2}$.
2. Calculer I_1, puis I_5.

Exercice 157. 1. A l'aide de la relation $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$ exprimer $\sin^4 x$ en fonction de $\cos x$.

2. En déduire la valeur de $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{6}} \cos^2 x \sin^5 x\,dx$.

Exercice 158. Le but de cet exercice est de calculer $\displaystyle\int_0^\pi \cos^4 x\,dx$.

1. En utilisant que $\cos^4 x = \left(\frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2}\right)^4$ et la formule du binôme, montrer que

$$\cos^4 x = \frac{1}{8}\left(\cos(4x) + 4\cos(2x) + 3\right)$$

2. Calculer $\displaystyle\int_0^\pi \cos^4 x\,dx$.

Exercice 159. * On considère pour tout entier naturel n les intégrales I_n et J_n suivantes :

$$I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin x)^n\,dx \qquad \text{et} \qquad J_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos x)^n\,dx.$$

1. Montrer que les intégrales I_n et J_n sont égales.

2. Calculer I_0 et I_1.

3. Etablir une relation de récurrence entre I_n et I_{n+2}.

4. Montrer que pour tout entier p

$$I_{2p} = \frac{(2p)!}{(2^p\, p!)^2} \times \frac{\pi}{2} \qquad I_{2p+1} = \frac{(2^p\, p!)^2}{(2p+1)!}$$

6.6 Intégration par changement de variables

Exercice 160. 1. En posant $x = \sin u$ calculer

$$\int_{-1}^{\frac{1}{2}} \sqrt{1-x^2}\, dx$$

2. En posant $x = \sin u$ ou $x = \cos u$ calculer

$$\int_{0}^{\frac{1}{2}} \sqrt{1-x^2}\, dx$$

3. Pour calculer $\int_{-2}^{2} \sqrt{4-x^2}\, dx$ commencer par faire un changement de variable affine pour vous ramener à un calcul d'intégrale analogue aux deux précédents. Terminer le calcul, l'aire de quel domaine connu vient-on de calculer ?

Exercice 161. 1. En posant $x = \sinh u$ calculer

$$\int_{0}^{\sinh 1} \sqrt{1+x^2}\, dx$$

2. Calculer

$$\int_{-1}^{1} \sqrt{4+x^2}\, dx$$

(indication : on pourra commencer par faire un changement de variable affine pour se ramener à un calcul d'intégrale analogue au précédent).

6.6.1 Changement affine

Exercice 162. Calculer

$$\int_{-1}^{1} \sqrt{4-x^2}\, dx$$

Exercice 163. 1. Ecrire $x^2 + 2x + 5$ sous forme canonique puis à l'aide d'un changement de variable affine, calculer

$$\int_{-1}^{1} \frac{1}{x^2+2x+5}\, dx$$

(☺ après le changement de variable affine on veut une fonction du type $\frac{1}{t^2+1}$)

2. Calculer la dérivée de la fonction $f : x \mapsto x^2 + 2x + 5$ puis trouver deux constantes réelles a et b telles que
$$\frac{x}{x^2+2x+5} = a\,\frac{f'(x)}{f(x)} + b\,\frac{1}{x^2+2x+5}$$
3. Calculer
$$\int_{-1}^{1} \frac{x}{x^2+2x+5}\,dx$$

Exercice 164. En vous inspirant de ce qui a été fait dans l'exercice précédent calculer pour tout réel x
$$\int_0^x \frac{1}{t^2+4}\,dt \qquad \int_0^x \frac{t+1}{t^2+4}\,dt$$

6.7 Intégration des fractions rationnelles

Exercice 165. Calculer
$$\int_2^4 \frac{1}{(x-1)^2}dx \quad ; \quad \int_0^1 \frac{x^2}{1+x^2}dx \quad ; \quad \int_0^1 \frac{2x}{x^2+4}dx \quad ; \quad \int_0^1 \frac{2x+2}{x^2+2x+5}dx.$$

Exercice 166. Calculer
$$\int \frac{1}{x^2+4} \quad ; \quad \int \frac{x+1}{x^2+4}dx'.$$

Exercice 167. Déterminer sur l'intervalle $]1,+\infty[$ les primitives de la fonction
$$x \mapsto \frac{1}{(x-1)^2(x+1)}.$$

Exercice 168.
1. Trouver les réels a et b tels que pour tout u différent de -1 et de -2
$$\frac{1}{u^2+3u+2} = \frac{a}{u+1} + \frac{b}{u+2}.$$
2. Calculer pour $x \geq 0$
$$F(x) = \int_0^x \frac{du}{u^2+3u+2}.$$
3. Trouver $\lim_{x\to+\infty} F(x)$.
4. Calculer
$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos t}{(\sin t)^2 + 3(\sin t) + 2}dt,$$
on pourra effectuer le changement de variable $u = \sin t$.

Exercice 169. Déterminer sur l'intervalle $]1,+\infty[$ les primitives de la fonction
$$x \mapsto \frac{1}{(x-1)^2(x+1)}.$$

Indication : trouver a, b et c tel que
$$\frac{1}{(x-1)^2(x+1)} = \frac{a}{x-1} + \frac{b}{(x-1)^2} + \frac{c}{x+1}$$

7 Equations différentielles linéaires d'ordre 1

7.1 Introduction : Notion générale d'équation différentielle

C'est au début du $XVII$ siècle, avec le calcul différentiel et intégral de Newton et Leibniz, qu'apparut la notion d'équations différentielles. Elles sont issues de problèmes de géométrie et de mécanique. Au début du $XVIII$ siècle les méthodes classiques de résolution de certaines équations furent découvertes. Avec le développement de la mécanique, la résolution des équations différentielles devient une branche importante des mathématiques (grâce à Euler, Lagrange, Laplace ...).

En mathématiques, une équation différentielle est une relation entre une ou plusieurs fonctions inconnues et leurs dérivées. L'ordre d'une équation différentielle correspond au degré maximal de dérivation auquel l'une des fonctions inconnues a été soumise.

Les équations différentielles représentent un vaste champ d'étude et sont utilisées pour construire des modèles mathématiques de phénomènes physiques et biologiques.

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$. y désigne une fonction d'une variable réelle notée x (ou des fois t qui désigne le temps) définie sur I. On notera par y' la dérivée de y et par y'' sa dérivée seconde, $y''(x) = (y'(x))'$.
Une **équation différentielle** est une équation où interviennent une fonction inconnue y de la variable réelle x (parfois on prend aussi t) et une ou plusieurs de ses dérivées y', y'' etc ... ainsi qu'éventuellement la variable x elle-même.

Par exemple,

$$y'(x) = 2y(x), \quad y(x)y'(x) + x = 1, \quad (y'(x))^2 + y(x) + x = 0, \quad y''(x) = y'(x) - xy^2(x)$$

sont des équations différentielles sur $I = \mathbb{R}$. Souvent on note y' au lieu de $y'(x)$.

On dit qu'une équation différentielle est **du premier ordre (ou d'ordre 1)** si elle ne fait intervenir que la variable x, la fonction y et sa dérivée première y'. Les équations :

$$y' = y, \quad yy' + x = 1, \quad y' - xy = 0$$

sont des équations différentielles du premier ordre (sur $\mathbb{R}$).

Une équation différentielle **du second ordre** peut faire intervenir x, y, y' et y''. Par exemple : l'équation $y'' + xy' - y = 0$ est du second ordre.

Dans ce cours, nous nous limitons à l'étude des équations différentielles du premier ordre dites linéaires.

7.2 Equations différentielles linéaires du 1^{er} ordre

7.2.1 Terminologie

Définition 7.1. *Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$. Soient a et f deux fonctions à valeurs dans $\mathbb{R}$ définies et continues sur I.*

- *Une* **équation différentielle linéaire du premier ordre** *(***ou d'ordre 1***) sur I est une équation de la forme :*
$$\text{(E)} \quad y'(x) + a(x)y(x) = f(x).$$
La fonction y est l'inconnue de l'équation.

- *On appelle* **solution de** (E) *toute fonction y définie et dérivable sur I et telle que :*
$$\textit{pour tout } x \in I, \quad y'(x) + a(x)y(x) = f(x).$$

- *L'équation*
$$\text{(H)} \quad y' + a(x)y = 0$$
est appelée **équation homogène associée à** (E).

Remarques

1. Lorsque l'intervalle I n'est pas précisé, c'est $\mathbb{R}$ tout entier.

Au lieu d'écrire l'équation (E) sous la forme : $y' + a(x)y = f(x)$, on écrit parfois simplement : $y' + ay = f$.

De même, l'équation homogène (H) s'écrit aussi : $y' + ay = 0$.

7.2.2 Solution de l'équation homogène (H) : $y' + ay = 0$

Théorème 7.2. *Soit $A(x) = \int a(x)dx$ une primitive de a sur I. L'équation*
$$\text{(H)} \quad y' + a(x)y = 0$$
admet une infinité de solutions : ce sont toutes les fonctions y_H données pour tout $x \in I$ par :
$$y_H(x) = Ce^{-A(x)},$$
où C est une constante réelle quelconque.

Preuve : Comme la fonction a est continue sur l'intervalle I, elle y admet des primitives. Si A désigne l'une d'entre elles, alors A est dérivable sur I et $A'(x) = a(x)$. Puisque $e^A > 0$, y est solution de (H) si et seulement si $y' + ay = 0$ ce qui est équivalent à $(y' + ay)e^A = 0$. On a $(e^{A(x)})' = A'(x)e^{A(x)} = a(x)e^{A(x)}$, donc
$$\left(y(x)e^{A(x)}\right)' = y'(x)e^A + y(x)(e^{A(x)})' = (y'(x) + a(x)y(x))e^{A(x)}.$$

Par suite : y est solution de (H) si et seulement si $\left(ye^{A}\right)' = 0$. Donc

$$\forall x \in I,\ \left(y(x)e^{A(x)}\right)' = 0 \Longleftrightarrow \exists C \in \mathbb{R}\ :\ \forall x \in I,\ y(x)e^{A(x)} = C.$$

Donc

$$y(x) = Ce^{-A(x)},$$

où C est une constante réelle quelconque.

Proposition 7.3. *Si y_1 et y_2 sont deux solutions de* (H) *alors pour tout* $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$*,*

$$\alpha y_1 + \beta y_2$$

est encore une solution de (H)*.*

Remarque

Cette proposition est la traduction de la linéarité de l'équation.

Exercice 170. Résoudre l'équation différentielle homogène : $y' + y\cos x = 0$.

7.2.3 Résolution de l'équation complète (E)

Théorème 7.4. *L'équation* (E) *admet une infinité de solutions.*

Si y_P désigne une solution particulière de (E) *alors toute solution y_E de* (E) *s'écrit pour tout $x \in I$:*

$$y_E(x) = Ce^{-A(x)} + y_P(x),$$

où C est une constante réelle quelconque.

Autrement dit $y_E = y_H + y_P$: la solution générale de (E) *est la somme de la solution générale de l'équation homogène* (H) *associée et d'une solution particulière de* (E)*.*

Remarque

Notons que les solutions de (E) dépendent d'un seul paramètre : la constante C.

Preuve : Comme y_P est solution de (E), on a : $f = y_P' + ay_P$. Donc y est solution de (E) si et seulement si

$$y' + ay = y_P' + ay_P,$$

donc $(y - y_P)' + a(y - y_P) = 0$ et $y - y_P$ solution de (H). Et on conclut via le Théorème 7.2.

Exemple

Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation différentielle : (E) $\quad y' + 2xy = 6x$.
On procède en 3 étapes.

$1^{ère}$ *étape :* Résolution de l'équation homogène associée

$$(\mathrm{H}) \quad y' + 2xy = 0.$$

Ici $a(x) = 2x$ admet pour primitive par exemple la fonction $A(x) = x^2$.
Donc la solution générale de (H) $y_H(x) = Ce^{-x^2}$ avec $C \in \mathbb{R}$ quelconque.
$2^{ème}$ *étape :* Recherche d'une solution particulière y_P de (E).
$y_P(x) = 3$ est une solution évidente puisque $y_P' = 0$ et donc $y_P' + 2xy_P = 0 + 2x \times 3 = 6x$.

$3^{ème}$ *étape :* Conclusion.
La solution générale de (E) est : $y_E(x) = Ce^{-x^2} + 3$ avec $C \in \mathbb{R}$ quelconque.

Exemple

On considère l'équation différentielle : (E) $\quad y' - 6x^2 y = e^{2x^3}$.

a) Vérifier que la fonction g donnée sur $\mathbb{R}$ par : $g(x) = xe^{2x^3}$ est une solution de (E).

b) Puis résoudre (E).

7.2.4 Recherche d'une solution particulière de (E)

Méthode de variation de la constante

Lorsqu'il n'est pas possible de trouver une solution évidente, on peut rechercher une solution particulière y de l'équation (E) : $y' + ay = f(x)$ sous la forme

$$y = C(x)e^{-A(x)}$$

c'est-à-dire ***en remplaçant*** *dans l'expression de la solution générale de* (H) ***la constante*** C ***par une fonction*** $C(x)$ *que l'on supposera dérivable (sur I).*

La recherche de cette solution y se ramène donc à celle de la fonction C.

Proposition 7.5 (Méthode de variation de la constante)**.** *Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$. Soient a et f deux fonctions à valeurs dans $\mathbb{R}$ définies et continues sur I. Soit l'équation différentielle linéaire d'ordre* 1

$$\text{(E)}: \quad y' + a(x)y = f(x).$$

Soit $A(x) = \int a(x)dx$ *une primitive de a. Alors une solution particulière de* (E) *est donnée par :*

$$y_P(x) = C(x)e^{-A(x)}$$

où $C(x) = \int e^{A(x)} f(x)dx$ *est une primitive de* $e^{A(x)} f(x)$.

Preuve : Si $y_P(x) = C(x)e^{-A(x)}$ avec C et A comme ci-dessus, alors la fonction y_P est dérivable sur I et on a : $\forall x \in I$

$$\begin{aligned} y_P'(x) &= C'(x)e^{-A(x)} - C(x)A'(x)e^{-A(x)} \\ &= C'(x)e^{-A(x)} - a(x)y_P(x) \qquad A'(x) = a(x) \\ &= e^{A(x)} f(x)e^{-A(x)} - a(x)y_P(x) \qquad C'(x) = c(x) = e^{A(x)} f(x) \\ &= f(x) - a(x)y_P(x) \end{aligned}$$

On en déduit que pour tout $x \in I$: $y_P'(x) + a(x)y_P(x) = f(x)$.

Exemple

On considère ici l'équation différentielle :

$$\text{(E)} \quad y' + 2xy = e^{-x^2+3x}.$$

- Son équation homogène est
$$(\mathrm{H}) : \quad y' + 2xy = 0.$$
C'est celle de l'Exemple 7.2.3 : elle admet pour solution générale :
$$\forall x \in \mathbb{R}, \; y_H(x) = Ce^{-x^2}$$
où $C \in \mathbb{R}$ constante quelconque.
- On cherche alors une solution particulière y_P de l'équation (E) sous la forme
$$\boxed{y_P(x) = C(x)e^{-x^2}}$$
où $C : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$.
Alors on a
$$y_P'(x) = C'(x)e^{-x^2} - 2x.C(x).e^{-x^2}.$$
Ce qui nous donne :
$$y_P'(x) + 2xy_P(x) = C'(x)e^{-x^2} \qquad \forall x \in \mathbb{R}. \tag{7.1}$$
Or, y_P est solution de (E) ce qui signifie l'on a :
$$y_P'(x) + 2xy_P(x) = e^{-x^2+3x} \qquad \forall x \in \mathbb{R}. \tag{7.2}$$
Des équations (7.1) et (7.2), on déduit que :
$$y_P = C(x)e^{-x^2} \text{ est solution de (E)} \iff C'(x)e^{-x^2} = e^{-x^2+3x}$$
Donc $C'(x) = e^{3x}$ et par suite $C(x) = \int e^{3x} = \frac{e^{3x}}{3} + K$
On peut par exemple prendre
$$C(x) = \frac{1}{3}e^{3x}$$
et on en conclut que la fonction $y_P(x) = \frac{1}{3}e^{-x^2+3x}$ est une solution particulière de (E). La solution de l'équation (E) est donc
$$y(x) = Ce^{-x^2} + \frac{1}{3}e^{-x^2+3x}.$$

On a la propriété générale suivante :

Exercice 171. Résoudre l'équation : (E) $\quad y' + 2xy = e^{-x^2} \times \cos x$.

Principe de superposition

Proposition 7.6 (Principe de superposition des solutions)**.** *Considérons deux équations différentielles linéaires définies sur un même intervalle I de $\mathbb{R}$ par*
$$(\mathrm{E}_1) \quad y' + a(x)y = f_1(x) \qquad \textit{et} \qquad (\mathrm{E}_2) \quad y' + a(x)y = f_2(x)$$
où a, f_1 et f_2 sont des fonctions définies et continues sur I.
Si y_{P_i} est solution particulière de de $(\mathrm{E_i})$ pour $i = 1, 2$. Alors
$$y_{P_1} + y_{P_2}$$
est une solution particulière de
$$(\mathrm{E}) \quad y' + a(x)y = f_1 + f_2.$$

Exemple

L'équation différentielle :

$$(\mathrm{E}) \quad y' - 6x^2 y = xe^{2x^3} + 12x^2$$

admet pour solution particulière

$$y_P(x) = xe^{2x^3} - 2.$$

En effet : d'une part , $y_{P_1}(x) = xe^{2x^3}$ est solution particulière de l'équation : $(\mathrm{E}_1) \quad y' - 6x^2 y = xe^{2x^3}$.
D'autre part, la fonction $y_{P_2}(x) = -2$ est une solution évidente de l'équation

$$(\mathrm{E}_2) \quad y' - 6x^2 y = 12x^2.$$

Le second membre de l'équation (E) étant la somme des seconds membres de (E_1) et (E_2), on conclut par le principe de superposition des solutions que la somme $y_{P_1} + y_{P_2}$ est une solution particulière de (E).

7.2.5 Problème de Cauchy-Lipschitz (Solution avec condition initiale)

La solution d'une équation différentielle du 1$^{\text{er}}$ ordre dépend d'une constante réelle (notée C dans le Théorème 7.4). Pour déterminer cette constante, il suffit de connaître une condition initiale c'est-à-dire la valeur de la solution en un point donné.

Définition 7.7. *Soient x_0 un point de I, y_0 un réel. On appelle problème de Cauchy le problème*

$$(\mathrm{C}) \begin{cases} y'(x) + a(x)y(x) &= b(x) \quad \forall x \in I \\ y(x_0) &= y_0 \end{cases}$$

La condition $y(x_0) = y_0$ est appelée **donnée initiale ou encore condition initiale**.

Le problème (C) admet une solution unique . Nous avons le théorème suivant

Théorème 7.8 (Théorème de Cauchy-Lipschitz)**.** *Soient a et f deux fonctions continues sur un intervalle I de $\mathbb{R}$. Considérons l'équation différentielle linéaire d'ordre 1 :*

$$(\mathrm{E}) \quad y' + a(x)y = f(x).$$

Fixons $x_0 \in I$ et $y_0 \in \mathbb{R}$. Alors il existe une unique solution y de (E) qui vérifie la condition initiale : $y(x_0) = y_0$.

Preuve : D'après le Théorème 7.4, comme y est solution de (E), il existe une constante $C \in \mathbb{R}$ telle que : $\forall x \in I, \quad y(x) = Ce^{-A(x)} + y_P(x)$.
Alors on a :

$$y(x_0) = y_0 \Longleftrightarrow Ce^{-A(x_0)} + y_P(x_0) = y_0 \Longleftrightarrow C = e^{A(x_0)}\left(y_0 - y_P(x_0)\right)$$

ce qui détermine la constante C.

7.3 Exercices

Exercice 172. Résoudre les équations différentielles

1. $y' = xy$.

2. $y' + xy = x$.
3. $xy' - y = x^3$.
4. $y' + (\tan x)y = \sin x \cos x$.

Exercice 173. Résoudre les problèmes suivants :

1. $y' + y = 0$ avec $y(0) = 1$.
2. $2y' - y = 0$ avec $y(0) = 1$.
3. $y' = xy$ avec $y(0) = 1$.
4. $y' + 5y = 3$ avec la condition initiale $y(0) = 0$.
5. $y' + 3y = 4e^x$ avec la condition initiale $y(0) = -2$.

Exercice 174. Résoudre les équations différentielles

1. $y' + y = xe^{-x} + 1$.
2. $3y' + 2y = 2x^3 + 9x^2 + 14$.
3. $y' - y = \sin x + 2\cos x$.
4. $y' = 3y + x^2e^x + \sin x$.

Exercice 175. Trouver les solutions réelles de l'équation différentielle suivante :

$$(1 + x^2)y' - y = 0.$$

Quelle est la solution vérifiant $y(1) = 2$?

Exercice 176.

1. Vérifier que $x \mapsto f(x) = x^2 - 2x + 2$ est solution de
$$y' + y = x^2$$
2. Déterminer l'ensemble des solutions de
$$y' + y = e^{-x}(\cos x + x^2)$$
3. En déduire les solutions de
$$y' + y = e^{-x}(\cos x + x^2) + x^2$$

Exercice 177.

1. Déterminer les solutions sur $]-\infty, 1[$ de l'équation différentielle
$$(x - 1)y' + (x - 2)y = x(x - 1)^2$$
Quelles sont celles vérifiant la condition $y(0) = 0$?
2. Déterminer les solutions sur $]1, +\infty[$ de l'équation différentielle précédente.

Exercice 178. Soit l'équation différentielle

$$(E): \quad |x|y'(x) + y(x) = x^3$$

1. Résoudre l'équation différentielle (E) sur $]-\infty, 0[$ et sur $]0, +\infty[$.

2. Montrer que la fonction f définie par

$$f:\ x \mapsto \begin{cases} -\dfrac{x^3}{2} & \text{si} \quad x \leq 0 \\ \dfrac{x^3}{4} & \text{si} \quad x > 0 \end{cases}$$

   est une solution de (E) sur $\mathbb{R}$.

Exercice 179. Soit l'équation différentielle $(E) : y'(x) + 3x^2 y(x) = x^2$.

1. Déterminer l'ensemble des solutions de (E).
2. Quelle est la solution vérifiant $y(0) = 1$?