Interrogation 3 : environ 2h

A rendre avant le vendredi 14 décembre

Une attention particulière devra être apportée à la rédaction.

Exercice 1 *Soit*

$$f : x \mapsto x^{\frac{1}{x}}$$

1. *Donnez le domaine de définition de la fonction f.*
2. *Justifiez que f est dérivable sur son ensemble de définition et déterminez sa dérivée f'.*
3. *Étudiez les variations de la fonction f sur son ensemble de définition (en faisant un tableau de variation) en calculant les limites de la fonction aux bornes de son ensemble de définition.*
4. *Combien de solutions admet l'équation $f(x) = \sqrt{2}$?*
   Déterminez toutes les solutions de l'équation $f(x) = \sqrt{2}$ (indice : ce sont des entiers).
5. *Soit J un intervalle de $\mathbb{R}$ et g la fonction définie par*

$$g \quad : \quad \begin{array}{ccc} [e, +\infty[& \to & J \\ x & \mapsto & f(x) \end{array}$$

   Déterminez l'intervalle J tel que la fonction g soit une bijection de $[e, +\infty[$ dans J.
6. *Calculez $g^{-1}(\sqrt{2})$ et $\left(g^{-1}\right)'(\sqrt{2})$ en simplifiant au maximum.*

Exercice 2 *Soit*

$$f : x \mapsto \tan(\arcsin(x))$$

1. *Donnez le domaine de définition de la fonction f.*
2. *Donnez une autre expression de la fonction f (qui ne fait intervenir que la fonction racine carrée et les fonctions puissances).*

Exercice 3 *Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose*

$$I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(t)^n dt.$$

1. *Calculez I_0 et I_1.*
2. *Démontrez que pour tout $n \in \mathbb{N}$,*

$$I_{n+2} = (n+1) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(t)^2 \cos(t)^n dt.$$

   Pour cela on pourra faire une intégration par partie en remarquant que $\cos(t)^{n+2} = \cos(t) \times \cos(t)^{n+1}$.
3. *Trouvez une relation entre I_{n+2} et I_n en utilisant la question précédente et le fait que* $\cos(t)^2 + \sin(t)^2 = 1$.
4. *Démontrez par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a*

$$I_{2n} = \frac{(2n)!}{4^n (n!)^2} \frac{\pi}{2}$$

   et

$$I_{2n+1} = \frac{4^n (n!)^2}{(2n+1)!}.$$

   Même si la récurrence n'aboutit pas, des points seront donnés pour la rédaction.