Introduction à l'analyse numérique
Année : 2018-2019
Formation : L2 Mathématiques

TP noté 1 : équations différentielles et recherche de zéros

Ce sujet est composé en trois parties indépendantes. Pour chaque partie il faudra créer deux fichiers dans lesquels vous enregistrerez votre code : un fichier en .sci qui contiendra toutes les fonctions de la partie et un fichier en .sce qui contiendra les autres commandes, par exemple les commandes pour afficher graphiquement vos résultats. Lorsqu'une réponse doit être apportée sous forme de texte, vous l'écrirez en commentaire (précéder la ligne de "//"). N'hésitez pas à utiliser les commentaires pour faire diverses remarques, par exemple sur de possibles problèmes dans vos fonctions. **Des points seront réservés à la qualité et la présentation du code.**

A la fin du TP vous devez envoyer vos six fichiers (partie1.sci ; partie1.sce ; partie2.sci ; partie2.sce ; partie3.sci ; partie3.sce) par mail à l'adresse suivante : florian.le-manach@math.u-bordeaux.fr. N'oubliez pas d'indiquer votre nom et prénom (et celui de votre binôme si vous faites le TP à deux) dans le mail.

1 Recherche de zéros de fonction : la méthode de Dekker

Dans cette partie on cherche à calculer, par plusieurs méthodes, un zéro d'une fonction f continue sur un intervalle $[a, b]$. On supposera dans toute la suite que $f(a)f(b) < 0$.

La première méthode naturelle pour chercher un zéro est d'utiliser la méthode de dichotomie (qui est basée sur le théorème des valeurs intermédiaires).

1. Définissez la fonction function R=dicho(f,a,b,k) qui prend en paramètre une fonction f, deux réels $a < b$ et un entier naturel k et qui renvoie une liste R=[c,d,n] où
- c et d sont des réels tels qu'un zéro de f appartienne à l'intervalle $[c, d]$ et tels que $d - c \leq 10^{-k}$;
- n est le nombre d'étapes pour avoir $d - c \leq 10^{-k}$.

2. Testez la fonction précédente sur $f(x) = \cos(x/2)$ et déterminez π à 6 décimales près.

On s'intéresse maintenant à une nouvelle méthode pour déterminer un zéro d'une fonction. Cette méthode, la méthode de Dekker, combine les méthodes de dichotomie et de la sécante.

3. Rappelez en commentaire la formule de récurrence associée à la méthode de la sécante.
Remarque : Dans la suite on notera S la fonction vérifiant $x_{k+1} = S(x_k, x_{k-1})$.

Voici le principe de la méthode de Dekker : on va construire deux suites (a_k) et (b_k) telles qu'un zéro de la fonction f soit toujours entre a_k et b_k (comme pour la méthode de dichotomie). Dans cette méthode on mettra toujours la meilleure approximation dans b_k et la moins bonne dans a_k.

On commence par poser $a_1 = a$, $b_1 = b$ et $b_0 = a$.

Supposons qu'on a construit les suites a_k et b_k jusqu'au rang k. On calcule $s = S(b_k, b_{k-1})$ et $m = (a_k + b_k)/2$. Si s est entre b_k et m, on pose $b_{k+1} = s$ sinon on pose $b_{k+1} = m$.

On choisit a_{k+1} de tel sorte que $f(a_{k+1})$ et $f(b_{k+1})$ aient des signes opposés. Si $f(a_k)$ et $f(b_{k+1})$ sont de signe opposé, alors on pose $a_{k+1} = a_k$. Sinon, cela veut dire que $f(b_{k+1})$ et $f(b_k)$ sont de signe opposé et on pose $a_{k+1} = b_k$.

Maintenant que a_{k+1} et b_{k+1} sont définis, il faut s'assurer que b_{k+1} est une meilleure approximation du zéro que a_{k+1}. Donc si $|f(a_{k+1})| < |f(b_{k+1})|$ alors on intervertit les variables a_{k+1} et b_{k+1} (c'est-à-dire on met la valeur de a_{k+1} dans b_{k+1} et la valeur de b_{k+1} dans a_{k+1}).

On recommence cette opération jusqu'à obtenir la précision $|a_k - b_k|$ voulue.

4. Définissez la fonction function R=dekker(f,a,b,k) qui prend en paramètre une fonction f, deux réels $a < b$ et un entier naturel k et qui renvoie une liste R=[b,n] où

- b est l'approximation du zéro de f avec une précision de 10^{-k} ;
- n est le nombre d'étapes pour avoir une précision de 10^{-k}.

Remarque : vous pouvez tester cette fonction à l'aide de la fonction de la question 2

On cherche à résoudre l'équation $(E)\ :\ x^x = 1789$.

5. Déterminez la solution de l'équation (E) à 10 décimales près à l'aide d'une des méthodes précédentes.
Remarque : on pourra chercher la solution dans l'intervalle $[1, 10]$.

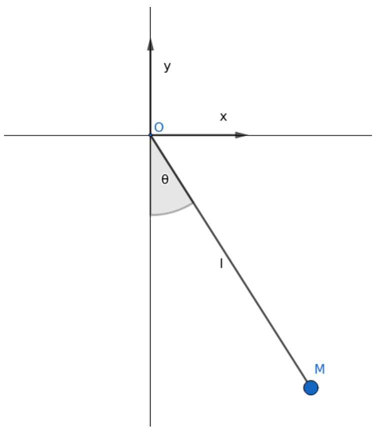
On cherche maintenant à comparer les méthodes de dichotomie et de Dekker.

Si vous n'avez pas réussi la question 4, vous pouvez quand même faire la question suivante en n'affichant le résultat que pour la méthode de dichotomie.

6. Pour chaque fonction (dekker et dicho), récupérez dans une liste le nombre d'étapes nécessaires pour obtenir une précision de 10^{-k} pour k variant de 1 à 12.
Affichez les résultats sur un graphique : k sera en abscisse et le nombre d'étape en ordonnée.
Quelle méthode est la plus efficace ?

2 Étude numérique d'un pendule

Dans cet partie on étudie le mouvement d'un pendule simple.



On note $\theta(t)$ l'angle formé entre l'axe des ordonnées et le fil du pendule au temps t. Si le pendule est à droite de l'axe des ordonnées alors $\theta(t) \geq 0$ et s'il est à gauche, $\theta(t) \leq 0$.

Les lois de la physique nous disent que la fonction θ vérifie l'équation différentielle suivante :

$$(E) : \theta''(t) = -\omega \sin(\theta(t)), \quad t \geq 0$$

On considère ici qu'au temps $t = 0$ le pendule est à la verticale avec une vitesse angulaire de 1, c'est-à-dire $\theta(0) = 0$ et $\theta'(0) = 1$. On prendra $\omega = 2$.

1. On transforme l'équation différentielle (E) en une équation du premier ordre. Pour cela on pose
$$X(t) = \begin{pmatrix} \theta(t) \\ \theta'(t) \end{pmatrix}.$$
Ainsi X vérifie une équation différentielle de la forme $X'(t) = f(t, X(t))$. Définissez la fonction `function Y=f(t,X)` associée à cette équation différentielle. Il est à noter que `X` et `Y` sont des vecteurs colonnes à deux éléments. On rappelle que pour accéder au premier (resp. deuxième) élément de `X` on utilise `X(1)` (resp. `X(2)`) et qu'on utilise le point-virgule pour définir des vecteurs colonnes.

On va résoudre l'équation $X'(t) = f(t, X(t))$ par la méthode d'Euler explicite.

2. Définissez la fonction `function L=eulerE(f,X0,tf,dt)` qui prend en paramètre la fonction f d'une equation $X'(t) = f(t, X(t))$, la condition initiale X_0 au temps $t = 0$, le temps final t_f et un pas de temps dt. Cette fonction renvoie la liste des X_n, pour $0 \leq n \leq \frac{t_f}{dt}$, vérifiant la formule d'Euler explicite.
Remarque : les X_n étant des vecteurs colonnes, la fonction renverra une matrice à 2 lignes.

   Si vous n'arrivez pas à faire cette fonction, rappelez la formule d'Euler explicite en commentaire.

3. A l'aide des deux premières questions, résolvez numériquement l'équation $X'(t) = f(t, X(t))$ avec un pas de temps $dt = 0,001$ jusqu'au temps $t_f = 5$. On fera attention à ce que la condition initiale soit donnée sous forme de vecteur colonne.

Les questions suivantes peuvent être traitées sans avoir réussi à faire les questions 2 et 3.

On peut vérifier le résultat obtenu à la question précédente avec la commande `ode(X0,0,[0 :0.001 :5],f)` où `X0` correspond à la condition initiale : les résultats doivent être identiques à 10^{-2} près. Si vous n'avez pas réussi à obtenir le bon résultat on prendra, dans la suite, le résultat de la commande `ode(X0,0,[0 :0.001 :5],f)` comme solution de l'équation $X'(t) = f(t, X(t))$.

4. A partir des résultats précédents, tracez la courbe de la fonction θ solution de l'équation (E) sur l'intervalle $[0, 5]$.
Sur un autre graphique tracez la courbe de la fonction θ'.

On veut maintenant dessiner la trajectoire du pendule. Par un raisonnement géométrique élémentaire, on a que les coordonnées du point M au temps t sont $x(t) = l \sin(\theta(t))$ et $y(t) = -l \cos(\theta(t))$ avec l la longueur du fil. Ici on prendra $l = 5$.

5. Tracez la trajectoire du pendule dans la fenêtre `rect=[-5,-6,5,0]`. Après la commande `plot2d` il faut mettre la commande `isoview` pour avoir un repère orthonormé.

Maintenant on augmente la vitesse angulaire du pendule de sorte à avoir $\theta'(0) = 1,5$.

6. Tracez, sur une nouvelle figure, la nouvelle trajectoire du pendule. Que remarque-t-on ?

3 Un exemple d'utilisation de la méthode d'Euler implicite

Dans cette partie on résout numériquement, sur l'intervalle $[0, 4]$, l'équation différentielle
$$(E) \ : \ y'(t) = y(t) - e^{y(t)}, \quad y(0) = 3.$$
On utilisera la méthode d'Euler implicite avec un pas de temps $dt = 0,01$.

1. Déterminez et définissez dans Scilab la fonction `function z=f(t,y)` associée à cette équation différentielle de sorte à avoir $y'(t) = f(t, y(t))$.

2. Rappelez en commentaire la formule d'Euler implicite. Cette formule nous dit que pour un y_n donné, y_{n+1} vérifie une équation. Déterminez et définissez dans Scilab la fonction $g(a,b)$ telle que y_{n+1} vérifie $g(y_{n+1}, y_n) = 0$.

3. Pour un b fixé, on cherche à trouver un x qui vérifie $g(x,b) = 0$. Pour cela on utilise la méthode de Newton. Calculez la dérivée de g par rapport à la première variable et donnez en commentaire l'expression de la suite des itérés de Newton.

4. Définissez la fonction `function z=Newton(b)` qui à un réel b renvoie un réel z vérifiant $|g(z,b)| \leq 10^{-10}$. On utilisera la méthode de Newton et on prendra $x_0 = 0$.

On peut maintenant résoudre l'équation différentielle (E) sur l'intervalle $[0,4]$ par la méthode d'Euler implicite.

5. A l'aide de la fonction `Newton`, définissez la fonction `function L=eulerI()` qui renvoie la liste des y_n, pour $0 \leq n \leq \frac{4}{0{,}01}$, vérifiant la formule d'Euler implicite.

6. Tracez la courbe représentative de la solution obtenue. On pourra comparer la solution obtenue avec le résultat de la commande `ode(3,0,[0 :0.01 :4],f)`