Correction DSI du 9 novembre 2017

V. Baron

Exercice 1 –

1. La fonction étudiée n'est autre que $x \mapsto x^{-\frac{3}{2}}$, de dérivée :

$$\begin{aligned} f'(x) &= -\frac{3}{2}x^{-\frac{5}{2}} \\ &= -\frac{3}{2x^2\sqrt{x}} \end{aligned}$$

2. Cette fonction se dérive comme un produit, ce qui donne :

$$g'(x) = 2x\tan(x) + (x^2+1)(1+\tan^2(x))$$

3. Il s'agit d'une composée de la forme $\ln(u)$, de dérivée $\dfrac{u'}{u}$:

$$h'(x) = \frac{4x+1}{2x^2+x+1}$$

4. Il s'agit d'une composée de la forme $\arctan(u)$, de dérivée $\dfrac{u'}{1+u^2}$:

$$j'(x) = -\frac{1}{1+(1-x)^2}.$$

Exercice 2 –

Formule d'intégration par parties :

$$\int_a^b u'(x)v(x)\ \mathrm{d}x = [u(x)v(x)]_a^b - \int_a^b u(x)v'(x)\ \mathrm{d}x.$$

Si l'on choisit $u'(x) = x^2$ et $v(x) = \ln(x)$, alors $u(x) = \dfrac{1}{3}x^3$ et $v'(x) = \dfrac{1}{x}$, donc :

$$\begin{aligned} \int_1^2 x^2\ln(x)\ \mathrm{d}x &= \left[\frac{1}{3}x^3\ln(x)\right]_1^2 - \int_1^2 \frac{1}{3}x^3 \times \frac{1}{x}\ \mathrm{d}x \\ &= \frac{8}{3}\ln(2) - \frac{1}{3}\int_1^2 x^2\ \mathrm{d}x \\ &= \frac{8}{3}\ln(2) - \frac{1}{9}\left[x^3\right]_1^2 \\ &= \frac{8}{3}\ln(2) - \frac{7}{9}. \end{aligned}$$

Exercice 3 –

On pose $u = e^x$, ce qui donne $du = e^x dx$. Les bornes deviennent respectivement $e^0 = 1$ et e^2, d'où :

$$\begin{aligned}
\int_0^2 \frac{e^x}{(1+e^x)^{\frac{5}{2}}}\, \mathrm{d}x &= \int_1^{e^2} \frac{1}{(1+u)^{\frac{5}{2}}}\, \mathrm{d}u \\
&= -\frac{2}{3}\left[\frac{1}{(1+u)^{\frac{3}{2}}}\right]_1^{e^2} \\
&= \frac{2}{3}\left[\frac{1}{2^{\frac{3}{2}}} - \frac{1}{(1+e^2)^{\frac{3}{2}}}\right].
\end{aligned}$$

Exercice 4 –

1. Les dérivées successives de f donnent :

$$\begin{array}{lcll}
f(x) & = & \sqrt{1+4x} & \Longrightarrow \quad f(0) = 1 \\
f'(x) & = & \dfrac{4}{2\sqrt{1+4x}} = \dfrac{2}{\sqrt{1+4x}} & \Longrightarrow \quad f'(0) = 2 \\
f''(x) & = & 2 \times \left[-\dfrac{4}{2(1+4x)^{\frac{3}{2}}}\right] = -\dfrac{4}{(1+4x)^{\frac{3}{2}}} & \Longrightarrow \quad f''(0) = -4
\end{array}$$

Le développement limité de f à l'ordre 2 est donc :

$$f(x) = 1 + 2x - 2x^2 + x^2\varepsilon_1(x), \quad \text{avec} \quad \lim_{x\to 0} \varepsilon_1(x) = 0.$$

2. Les dérivées successives de g donnent :

$$\begin{array}{lcll}
g(x) & = & \cos(x) + 2\ln(1+x) & \Longrightarrow \quad g(0) = 1 \\
g'(x) & = & -\sin(x) + \dfrac{2}{1+x} & \Longrightarrow \quad g'(0) = 2 \\
g''(x) & = & -\cos(x) - \dfrac{2}{(1+x)^2} & \Longrightarrow \quad g''(0) = -3
\end{array}$$

Le développement limité de g à l'ordre 2 est donc :

$$g(x) = 1 + 2x - \frac{3}{2}x^2 + x^2\varepsilon_2(x), \quad \text{avec} \quad \lim_{x\to 0} \varepsilon_2(x) = 0.$$

3. On a donc :

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 0} \frac{f(x) - g(x)}{x^2} &= \lim_{x\to 0} \frac{\left[1 + 2x - 2x^2 + x^2\varepsilon_1(x)\right] - \left[1 + 2x - \frac{3}{2}x^2 + x^2\varepsilon_2(x)\right]}{x^2} \\
&= \lim_{x\to 0} \frac{-\frac{x^2}{2} + x^2(\varepsilon_1(x) - \varepsilon_2(x))}{x^2} \\
&= \lim_{x\to 0} -\frac{1}{2} + \varepsilon_1(x) - \varepsilon_2(x) \\
&= -\frac{1}{2}.
\end{aligned}$$