

Question 1 Calculer les dérivées des fonctions suivantes:

$$1) f(x) = (x + \sin(x))^2 \quad 2) g(x) = e^x \ln(1+x) \quad 3) h(x) = \frac{\cos(x)}{x^3 + 1}$$

Question 2

a) A l'aide d'une intégration par parties calculer l'intégrale $\int_1^2 x \ln(x) dx$.

b) Calculer l'intégrale $I = \int_1^e \sqrt{1+x} dx$.

c) En utilisant le changement de variable $u = e^x$ calculer l'intégrale $J = \int_0^1 e^{3x} \sqrt{1+e^x} dx$.

Question 3 On considère l'équation différentielle

$$y'(x) = 2y(x) + e^{2x} \quad (E)$$

a) Résoudre sur \mathbb{R} l'équation différentielle homogène: $y'(x) = 2y(x)$.

b) Déterminer une solution particulière y_p de (E) en utilisant la méthode de la variation de la constante.

c) Donner toutes les solutions de (E) sur \mathbb{R} .

d) En déduire la solution de (E) qui vérifie $y(0) = 1$.

Question 4 On considère l'équation différentielle $y''(x) + 2y'(x) - 3y(x) = x^2 + 1$ (E).

a) Ecrire les racines de l'équation caractéristique associée à (E). En déduire toutes les solutions de l'équation différentielle $y''(x) + 2y'(x) - 3y(x) = 0$.

b) Trouver une solution particulière notée y_p de (E). On cherchera y_p sous la forme $y_p(x) = ax^2 + bx + c$, où a, b et c sont des réels à déterminer.

c) Résoudre sur \mathbb{R} l'équation différentielle (E).

Question 5

a) Donner le développement limité à l'ordre 2 au voisinage de 0 des fonctions suivantes:

$$1) e^x \quad 2) x \sin x \quad 3) 1 + x + x \sin x$$

b) En déduire la limite

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - (1 + x + x \sin x)}{x^2}$$