Interrogation 3 : 25 min

Le but de ce devoir est de résoudre sur $]0,\infty[$, l'équation différentielle suivante

$$(E) \ : \ y' + \frac{1}{x}y = \ln(x).$$

1. On pose
$$(H) \ : \ y' + \frac{1}{x}y = 0.$$
Déterminer l'ensemble des solutions de l'équation (H). Simplifier au maximum le résultat (en utilisant les propriétés de l'exponentielle).
2. En utilisant le théorème d'intégration par parties, calculer pour un $x \in]0,\infty[$ fixé,
$$\int_1^x t\ln(t)dt.$$
En déduire une primitive de la fonction $x \mapsto x\ln(x)$.
3. En utilisant la méthode de variation de la constante, trouver une solution particulière de l'équation (E).
4. Montrer que l'ensemble des solutions de (E) est
$$S_E = \left\{ x \mapsto \frac{x\ln(x)}{2} - \frac{x}{4} + \frac{\lambda}{x}, \ \lambda \in \mathbb{R} \right\}.$$
5. Déterminer l'unique solution de (E) vérifiant $y(1) = 1$.