TD 2 : Intégration

Exercice 1 *Calculer les intégrales suivantes*

$$\int_1^4 3 \ \mathrm{d}x, \quad \int_0^1 x^3 \ \mathrm{d}x, \quad \int_1^2 \frac{1}{x^2} \ \mathrm{d}x, \quad \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}} \ \mathrm{d}x, \quad \int_1^3 \frac{1}{x\sqrt{x}} \ \mathrm{d}x, \quad \int_0^\pi \sin(x) \ \mathrm{d}x, \quad \int_0^1 e^{-x} \ \mathrm{d}x.$$

Exercice 2 *Pour chaque fonction, déterminer une primitive*

$$x \mapsto \frac{x^3 - 2x^2 - 3x + 4}{x^2}, \qquad x \mapsto \cos(5x - 3), \qquad x \mapsto \frac{1}{x-1},$$
$$x \mapsto \sin(x)\cos(x), \qquad x \mapsto \frac{x+1}{x^2 + 2x + 2}, \qquad x \mapsto x\sqrt{x^2+1}$$

Exercice 3 *Calculer les intégrales suivantes*

$$\int_0^1 2te^{t^2} \ \mathrm{d}t, \quad \int_0^1 e^t \sqrt{e^t + 3} \ \mathrm{d}t, \quad \int_2^3 t\sin(t^2) \ \mathrm{d}t, \quad \int_2^3 \frac{t}{t^2 - 3} \ \mathrm{d}t, \quad \int_{\sqrt{2}}^{\sqrt{3}} \frac{t}{\sqrt{4 - t^2}} \ \mathrm{d}t,$$
$$\int_0^{\pi/3} \frac{\cos(t)}{1 - \sin(t)} \ \mathrm{d}t, \quad \int_1^3 \frac{\ln(t)}{t} \ \mathrm{d}t, \quad \int_0^{\pi^2} \frac{\sin(\sqrt{t})}{\sqrt{t}} \ \mathrm{d}t, \quad \int_0^{\pi/4} \tan(t) \ \mathrm{d}t, \quad \int_0^{\pi/4} \tan(t)^2 \ \mathrm{d}t$$

Exercice 4 *Déterminer deux réels a et b tels que pour tout réel x différent de -1 et 5 on ait* $\dfrac{1}{x^2 - 4x - 5} = \dfrac{a}{x+1} + \dfrac{b}{x-5}$. *En déduire un calcul de*

$$\int_0^2 \frac{1}{x^2 - 4x - 5} \ \mathrm{d}x.$$

Exercice 5 (IPP) *Calculer les intégrales suivantes à l'aide d'une intégrale par partie*

$$\int_0^2 xe^{2x} \ \mathrm{d}x, \quad \int_0^1 (x^2 + 1)e^x \ \mathrm{d}x, \quad \int_1^2 \frac{\ln(x)}{x} \ \mathrm{d}x, \quad \int_0^{\pi/4} \arctan(x) \ \mathrm{d}x, \quad \int_1^{e^{\pi/2}} \sin(\ln(x)) \ \mathrm{d}x.$$

Exercice 6 *Pour $n \in \mathbb{N}$ et $x \in \mathbb{R}^+$, on pose*

$$I_n(x) = \int_0^x t^n e^{-t} \ \mathrm{d}t \quad \textit{et} \quad J_n = \lim_{n \to \infty} I_n(x).$$

Déterminer une relation de récurrence vérifiée par $I_n(x)$ puis en passant à la limite, déterminer J_n en fonction de n.

Exercice 7 *Calculer les intégrales suivantes à l'aide d'un changement de variable*

$$\int_0^1 \frac{e^{2x}}{1 + e^{3x}} \ \mathrm{d}x, \quad \int_0^{\pi^2} \cos(\sqrt{x}) \ \mathrm{d}x, \quad \int_1^2 \frac{\ln(t)}{\sqrt{t}} \ \mathrm{d}x.$$