Méthode de résolution d'équations différentielles linéaire d'ordre 1

Soit a et b deux fonctions continues sur un intervalle I. On considère l'équation différentielle

$$(E) \ : \ y' + a(x)y = b(x).$$

On dit que l'on résout l'équation (E) lorsque l'on détermine **toutes** les fonctions y dérivables sur I vérifiant pour tout $x \in I$, $y'(x) + a(x)y(x) = b(x)$.
Pour résoudre ce type d'équation, on utilise la méthode suivante.

Étape 1 : On considère l'équation différentielle homogène (aussi appelée équation différentielle sans second membre)

$$(H) \ : \ y' + a(x)y = 0.$$

On cherche alors à résoudre l'équation différentielle (H). Pour cela on utilise le résultat suivant

Théorème 1 *L'ensemble des solutions de l'équation différentielle*

$$(H) \ : \ y' + a(x)y = 0,$$

que l'on note S_H est donné par

$$S_H = \{x \mapsto \lambda e^{-A(x)}, \ \lambda \in \mathbb{R}\},$$

où A est une primitive sur I de la fonction a.

Concrètement pour résoudre (H), on a besoin de determiner une primitive de la fonction a. On peut utiliser tous les outils du cours d'intégration pour faire cela : soit on trouve directement une primitive de a en utilisant par exemple le tableau des primitives, soit on dit qu'une primitive A de a peut s'écrire sous forme intégrale comme ceci

$$A(x) = \int_0^x a(t)dt$$

(en fait ceci n'est valable que si $0 \in I$, si ce n'est pas le cas il faut prendre un nombre de l'intervalle I à la place de 0). On peut ensuite appliquer tous les théorèmes sur les intégrales (IPP, changement de varibales, ...) pour déterminer A.
Le théorème nous dit alors que toutes les solutions de l'équation (H) sont de la forme $y(x) = \lambda e^{-A(x)}$ avec λ un nombre réel. Il est facile de vérifier que y est bien solution de (H) en la dérivant.

Étape 2 : On cherche une solution particulière de l'équation (E). Pour cela on pose

$$y_p(x) = \lambda(x)e^{-A(x)}$$

avec λ qui est maintenant une fonction dérivable sur I (au lieu d'être une constante comme dans l'étape 1, d'où le nom de cette méthode : variation de la constante). On cherche à déterminer une fonction λ de sorte que y_p soit solution de (E). On obtient que

$$y_p \text{ est solution de } (E) \iff \lambda'(x) = b(x)e^{A(x)}.$$

Ceci se démontre facilement en injectant y_p dans l'équation différentielle (E). En effet on a $y_p'(x) = \lambda'(x)e^{-A(x)} - \lambda(x)a(x)e^{-A(x)} = \lambda'(x)e^{-A(x)} - a(x)y_p(x)$. Donc

$$\begin{aligned} y_p \text{ est solution de } (E) &\iff y_p'(x) + a(x)y_p(x) = b(x) \\ &\iff \lambda'(x)e^{-A(x)} - a(x)y_p(x) + a(x)y_p(x) = b(x) \\ &\iff \lambda'(x)e^{-A(x)} = b(x) \end{aligned}$$

Ainsi pour déterminer un λ qui convient il suffit de trouver une primitive de la fonction $x \mapsto b(x)e^{A(x)}$ car $\lambda'(x) = b(x)e^{A(x)}$. Ici aussi on peut utiliser tout le cours d'intégration pour déterminer une primitive de cette fonction.
On obtient que y_p est une solution particulière de l'équation (E) avec le λ que l'on a trouvé.

Étape 3 : Finalement, un dernier résultat nous dit que toutes les solutions de l'équation différentielle (E) sont de la forme $y = y_p + y_H$ avec y_p la solution particulière de l'étape 2 et y_H une solution de l'équation (H) ($y_H \in S_H$ que l'on a déterminé à l'étape 1).
Si on note S_E l'ensemble de solution de (E), on a alors

$$S_E = \{y_p + y_H,\ y_H \in S_H\}.$$

Exemple : On va résoudre sur $\mathbb{R}$ ($I = \mathbb{R}$) l'équation différentielle suivante :

$$(E)\ :\ y' + \cos(x)y = \sin(x)\cos(x).$$

(Étape 1) : On pose $(H)\ :\ y' + \cos(x)y = 0$. On sait d'après le tableau des primitives usuelles, qu'une primitive de la fonction cos est sin. Ainsi l'ensemble des solutions de H est

$$S_H = \{x \mapsto \lambda e^{-\sin(x)},\ \lambda \in \mathbb{R}\}.$$

(Étape 2) : On pose $y_p(x) = \lambda(x)e^{-\sin(x)}$ avec λ une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$. D'après la méthode de variation de la constante, y_p est solution de l'équation (E) si et seulement si $\lambda'(x) = \sin(x)\cos(x)e^{\sin(x)}$. Ainsi on prend λ une primitive de la fonction $x \mapsto \sin(x)\cos(x)e^{\sin(x)}$. Or ici cela ne semble pas évident de trouver une primitive directement. On écrit donc cette primitive sous forme intégrale. Ainsi on a

$$\lambda(x) = \int_0^x \sin(t)\cos(t)e^{\sin(t)}dt.$$

En utilisant le théorème d'intégration par partie (avec $u(t) = \sin(t)$ et $v'(t) = \cos(t)e^{\sin(t)}$) on obtient

$$\begin{aligned} \lambda(x) &= \left[\sin(t)e^{\sin(t)}\right]_0^x - \int_0^x \cos(t)e^{\sin(t)}dt \\ &= \sin(x)e^{\sin(x)} - \left[e^{\sin(t)}\right]_0^x \\ &= \sin(x)e^{\sin(x)} - e^{\sin(x)} + 1 \end{aligned}$$

Ici, par simplification, on peut prendre $\lambda(x) = \sin(x)e^{\sin(x)} - e^{\sin(x)}$ car enlever une constante ne change pas le fait que λ soit une primitive de $x \mapsto \sin(x)\cos(x)e^{\sin(x)}$. Ainsi $y_p : x \mapsto \sin(x) - 1$ est une solution particulière de (E).
(Étape 3) : Ainsi l'ensemble des solutions de E est

$$S_E = \{x \mapsto \sin(x) - 1 + \lambda e^{-\sin(x)},\ \lambda \in \mathbb{R}\}.$$

De plus si on rajoute une condition initiale du type $y(0) = 1$ alors la solution à l'équation (E) devient unique et on peut facilement la calculer en trouvant le λ correspondant. Par exemple dans le cas où $y(0) = 1$ on a $y(0) = \sin(0) - 1 + \lambda e^{-\sin(0)} = -1 + \lambda = 1$ donc $\lambda = 2$.