

TD 1 : Interpolation : polynômes de Lagrange

1 TD

Exercice 1 :

1. Déterminer un polynôme P de degré 2 vérifiant

$$(1) : \begin{cases} P(0)=1 \\ P(1)=2 \\ P(2)=0 \end{cases}$$

2. Combien de polynômes de degré 2 vérifient (1) ?
3. Combien de polynômes de degré inférieur à 1 vérifient (1) ?
4. Combien de polynômes de degré supérieur à 3 vérifient (1) ?

Exercice 2 : Soit $[a, b]$ un intervalle de \mathbb{R} et $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de réels deux à deux distincts de $[a, b]$. Soit P_N le polynôme de Lagrange qui interpole la fonction sin aux points $\{x_n, 0 \leq n \leq N\}$. Montrer que la suite (P_N) converge uniformément vers la fonction sin sur l'intervalle $[a, b]$.

Exercice 3 : Soit $n \in \mathbb{N}$. Soit $(P_k)_{k \in \mathbb{N}}$ une suite de polynômes de degré n qui converge simplement vers une fonction f sur un intervalle $[a, b]$. Montrer que f est un polynôme de degré inférieur à n et que la convergence est uniforme sur $[a, b]$.

Indication : on pourra utiliser l'interpolation de Lagrange sur $n + 1$ points distincts de $[a, b]$.

2 TD machine

Exercice 1 : Le but de cet exercice est d'implémenter des programmes permettant de calculer les polynômes d'interpolation de Lagrange.

1. Étant donné une suite de points $(x_i, y_i)_{1 \leq i \leq n}$ à interpoler et $x \in \mathbb{R}$ différent des x_i , combien faut-il d'opérations au minimum pour calculer $P(x)$, la valeur du polynôme de Lagrange en x . On ne comptera ici que les multiplications et les divisions.
2. Écrire une fonction `R = lagrangeP(X,Y,T)`. Cette fonction prend en paramètre une liste $X = (x_i)_{1 \leq i \leq n}$ et une liste $Y = (y_i)_{1 \leq i \leq n}$ qui correspond aux abscisses et aux ordonnées des points à interpoler, et une liste $T = (t_j)_{1 \leq j \leq N}$. Cette fonction renvoie la liste $R = (P(t_j))_{1 \leq j \leq N}$ des valeurs du polynôme de Lagrange aux points t_j .
3. Même question en remplaçant Y par une fonction f à interpoler sur les (x_i) :
fonction `R = lagrangef(X,f,T)`.
On pourra ici utiliser directement la fonction précédente.
4. Tester les fonctions précédentes aux exemples des exercices 1 et 2 du TD. Afficher les résultats avec `plot2d`.