**Méthodes numériques**
Année : 2018-2019
Formation : L3 Mathématiques

# TD 2 : Polynômes de Newton et de Tchebichev

## 1 TD

**Exercice 1 :** Soit $(x_i, y_i)_{0\leq i\leq n}$ une suite de points de $\mathbb{R}^2$ telle que les $x_i$ soient deux à deux distincts. On définit pour tout entier $i$ compris entre 0 et $n$,

$$[x_i] = y_i$$

pour tout $i, j$ entiers distincts compris entre 0 et $n$,

$$[x_i, x_j] = \frac{[x_j] - [x_i]}{x_j - x_i} = \frac{y_j - y_i}{x_j - x_i}$$

et de manière générale, on définit par récurrence pour tout entier $i_0$, $i_1$, ..., $i_k$ deux à deux distincts compris entre 0 et $n$,

$$[x_{i_0}, x_{i_1}, \ldots, x_{i_k}] = \frac{[x_{i_1}, x_{i_2}, \ldots, x_{i_k}] - [x_{i_0}, x_{i_1}, \ldots, x_{i_{k-1}}]}{x_{i_k} - x_{i_0}}.$$

Montrer que l'unique polynôme de degré $n$ qui interpole les points $(x_i, y_i)_{0\leq i\leq n}$ s'écrit sous la forme :

$$P(X) = \sum_{k=0}^{n} [x_0, \cdots, x_k] \prod_{i=0}^{k-1} (X - x_i).$$

Quel est l'avantage cette formule, des polynômes de Newton, par rapport à la formule des polynômes de Lagrange ?

**Exercice 2 :** Pour tout entier $n$, on définit sur $[-1, 1]$ la fonction $T_n : x \mapsto \cos(n \arccos(x))$.

**1.** Déterminer les fonctions $T_0$ et $T_1$.

**2.** Montrer que pour tout $n \geq 1$ et pour tout $x \in [-1, 1]$,

$$T_{n+1}(x) + T_{n-1}(x) = 2x\ T_n(x). \tag{1}$$

**3.** En déduire que $T_n$ est un polynôme de degré $n$ dont on précisera le terme de plus haut degré.

**4.** Expliciter les racines de $T_n$ ainsi que la valeur de $\max\{[T_n(x)|,\ x \in [-1, 1]\}$.

**5.** Montrer que les polynômes de Tchebichev sont orthogonaux pour le produit scalaire définit sur $\mathbb{R}[X]$ par

$$\langle f, g\rangle = \int_{-1}^{1} \frac{f(x)g(x)}{\sqrt{1 - x^2}}\ dx.$$

**6.** Montrer que le polynôme $T_n$ est solution de l'équation différentielle

$$(1 - x^2)y'' - xy' + n^2 y = 0.$$

# 2 TD machine

**Exercice 1 :** Soit $f$ la fonction définie sur $[-1,1]$ par $f(x) = \frac{1}{1+25x^2}$.
A l'aide de la fonction `lagrangef` du TD 1, interpoler la fonction $f$ sur des points équidistants de l'intervalle $[-1,1]$ avec des polynômes de Lagrange de degré 5, 10 et 20. Affichez sur un même graphe les courbes représentatives de la fonction $f$ et des polynômes interpolateurs de degré 5 et 10 (avec des couleurs). Sur un graphe à part tracer la courbe représentative du polynôme interpolateur de degré 20. Qu'observe-t-on ? Ce phénomène et appelé phénomène de Runge.
Même question mais en interpolant cette fois sur les racines des polynômes de Tchebychev. Qu'observe-t-on ?

**Exercice 2 :** A l'aide de la formule de récurrence (1) de l'exercice 2 du TD (et uniquement cette formule), écrire une fonction `function R = tchebichev(n,T)` qui prend en paramètre un entier $n$ et une liste $T$ et qui renvoie la valeur du $n$-ième polynôme de Tchebichev $T_n$ sur les éléments de la liste $T$.

**Exercice 3 :** Écrire une fonction `function R = newton(X,Y,T)` qui calcule les polynômes de Newton (même question que dans le TD1 avec la fonction lagrangeP mais cette fois en utilisant la formule de Newton).
*Remarque : il est possible de faire cela par récursivité.*