Méthodes numériques
Année : 2018-2019
Formation : L3 Mathématiques

TD 3 : Minimisation et polynômes orthogonaux

1 TD

Exercice 1 : Calculer

$$\min_{a,b\in\mathbb{R}} \int_0^1 (t^3 - at - b)^2 dt.$$

Exercice 2 : Les polynômes de Hermite sont les polynômes orthogonaux unitaires associés à la fonction de poids

$$w(x) = e^{-x^2}.$$

Plus précisément on pose $L_w^2(\mathbb{R})$ l'ensemble des fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ vérifiant

$$\int_{\mathbb{R}} |f(x)|^2 e^{-x^2} dx < \infty.$$

On munit $L_w^2(\mathbb{R})$ du produit scalaire

$$\langle f, g\rangle = \int_{\mathbb{R}} f(x)g(x)e^{-x^2} dx.$$

On note H_n, $n \geq 0$, la suite des polynômes orthogonaux unitaires associés à ce produit scalaire.

1. Montrer que l'ensemble des polynômes est inclus dans $L_w^2(\mathbb{R})$.

2. Déterminer H_0, H_1 et H_2.

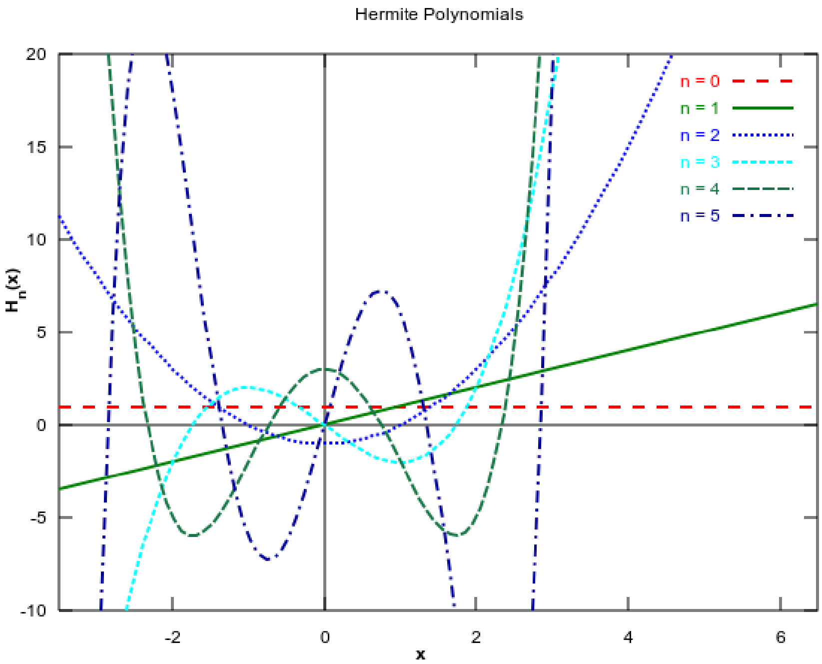
3. Montrer que pour tout $n \geq m + 2$, $\langle H_n', H_m\rangle = 0$ (penser à une IPP).
En déduire que $H_n' = nH_{n-1}$.

4. Établir que pour tout $n \geq 1$ et $x \in \mathbb{R}$,

$$H_{n+1}(x) = xH_n(x) - \frac{n}{2}H_{n-1}(x). \tag{1}$$

2 TD machine

Exercice 1 : A l'aide de la formule de récurrence (1) de l'exercice 2 du TD, écrire une fonction function R = hermite(n,T) qui prend en paramètre un entier n et une liste T et qui renvoie la valeur du n-ième polynôme de Hermite H_n sur les éléments de la liste T. Tracer sur un même graphe les six premiers polynômes de Hermite $H_0, \ldots, H_5$ (avec des couleurs différentes) dans la fenêtre $[-4, 6] \times [-10, 20]$. Comparer le résultat avec ce graphe :



Exercice 2 : On s'intéresse dans cet exercice à une des interpolations les plus simples : l'interpolation linéaire par morceaux. Pour une fonction f définie sur $[a, b]$ et $(x_i)_{1 \leq i \leq n}$ une suite de n points de $[a, b]$, on interpole la fonction f par une fonction L linéaire par morceaux vérifiant $L(x_i) = f(x_i)$.
Écrire une fonction function s = interpoLin(f,X,t) qui prend en paramètre une fonction f et une liste de points X à interpoler ainsi qu'un réel $t \in [a, b]$. Cette fonction renvoie la valeur $L(t)$.
Tester cette fonction sur des exemples représentatifs (par exemple $f(x) = e^x$ et $f(x) = \cos(x)$) et tracer sur un graphe la courbe de la fonction interpolatrice.