Méthodes numériques
Année : 2018-2019
Formation : L3 Mathématiques

TD 5 : Courbes de Bézier

1 TD machine

On notera pour $0 \leq k \leq n$ entiers et pour $x \in [0, 1]$,

$$B_k^n(x) = \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k}.$$

La courbe de Bézier associée aux points de contrôle $(P_0, P_1, \ldots, P_n)$ est définie par

$$B(t) = \sum_{k=0}^{n} B_k^n(t) P_k, \quad t \in [0, 1].$$

Exercice 1 :

1. Écrire une fonction function M = bezier(P,m). Cette fonction prend en paramètre une matrice P à 2 lignes et n colonnes, chaque colonne correspondant aux coordonnées d'un point de contrôle P_k. Par exemple si $P_k = (x_k, y_k)$ on définit
$$P = \begin{pmatrix} x_0 & x_1 & \cdots & x_n \\ y_0 & y_1 & \cdots & y_n \end{pmatrix}.$$
Le deuxième paramètre m est un entier. Cette fonction renvoie une matrice M à 2 lignes et $m+1$ colonnes, la k-ième colonne de M correspondant aux coordonnées du vecteur $B((k-1)/m)$.
On fera attention dans cette question à optimiser les calculs (notamment des coefficients binomiaux) comme dans le TD précédent.
2. Tracer la courbe de Bézier associée aux points de contrôle : $P_0 = (0, 0)$; $P_1 = (1, 2)$; $P_2 = (-6, 1)$; $P_3 = (-4, 0)$; $P_0 = (5, 0)$. On pourra prendre 1000 points sur la courbe pour la tracer.
3. Écrire une fonction function M = deriveBezier(P,k,m) qui calcule la matrice M dont la n-ième colonne correspond aux coordonnées du vecteur $B^{(k)}((n-1)/m)$ avec $B^{(k)}$ correspondant à la dérivée k-ième de la courbe de Bézier.
4. Tracer la dérivée seconde de la courbe de Bézier définie dans la question 2.
5. L'algorithme de Casteljau est un algorithme récursif pour dessiner efficacement des courbes de Bézier. Soit $(P_0, P_1, \ldots, P_n)$ des points de contrôle.
Pour $i \in [\![0, n]\!]$, on considère les points $P_i^0 = P_i$ et pour $j \in [\![1, n]\!]$ et $i \in [\![0, n-j]\!]$, on construit récursivement les points
$$P_i^j = \frac{1}{2}(P_i^{j-1} + P_{i+1}^{j-1}).$$
Géométriquement P_i^j est le milieu des points P_i^{j-1} et P_{i+1}^{j-1}.
Un résultat nous dit que le point $P_0^n = B(1/2)$ appartient à la courbe de Bézier qui peut être scindée en deux : $B(2t)$ et $B(1-2t)$. La première partie $B(2t)$ peut être vue comme une courbe de Bézier associée aux points de contrôle $(P_0^0, P_0^1, \cdots, P_0^n)$ et la seconde partie $B(1-2t)$ comme une courbe de Bézier associée aux points de contrôle $(P_n^0, P_{n-1}^1, \cdots, P_{n-i}^i, \cdots, P_0^n)$. Ce résultat nous donne une méthode pour construire récursivement les courbes de Bezier.

   Le but de cette question est d'écrire une fonction function Casteljau(P,d) qui trace la courbe de Bézier ayant pour points de contrôle la liste P avec une précision de d. Cette fonction sera récursive et l'algorithme sera le suivant :

— condition d'arrêt : si les points de contrôle contigus sont tous à une distance inférieur à d alors on trace une ligne brisée avec la commande xpoly(P(1, :),P(2, :),"lines") ;

— récursivité : on calcule les points P_i^j et on trace les deux parties de la courbe de Bézier en appelant récursivement la fonction Casteljau.