Méthodes numériques
Année : 2018-2019
Formation : L3 Mathématiques

TD 6 : Dérivation et intégration numérique

1 TD machine

Exercice 1 : Soit f une fonction réelle de classe C^3 sur un intervalle $[a,b]$. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On pose

$$h = \frac{b-a}{n} \quad \text{et} \quad x_k = a + kh,\ k \in [\![0,n]\!]. \tag{1}$$

1. Donner une estimation à l'ordre 1 de la dérivée de f en x_0 et x_n et donner une estimation à l'ordre 2 de la dérivée de f en x_k lorsque $k \notin \{0,n\}$.
2. Écrire une fonction function L = derive(f,a,b,n) qui calcule la liste des approximations des dérivées de f en x_k. On utilisera les approximations données à la question précédente.

Exercice 2 :

Soit f une fonction continue sur $[a,b]$.

1. Écrire une fonction function s = intTrap(f,a,b,n) qui calcule l'intégrale $\int_a^b f(t)dt$ en utilisant la méthode des trapèzes sur les x_k définis par (1).
2. Écrire une fonction function s = intSim(f,a,b,n) qui calcule l'intégrale $\int_a^b f(t)dt$ en utilisant la méthode de Simpson sur les x_k définis par (1).
3. A l'aide des deux méthodes calculer $\int_0^\pi \sin(t)dt$. Comparer ces valeurs avec la valeur théorique. Tracer sur un même graphe la courbe du logarithme de l'erreur commise en fonction de n pour les deux méthodes.
4. On considère maintenant que f est dérivable sur $[a,b]$. La longueur de la courbe représentative de f est donnée par la formule
$$L = \int_a^b \sqrt{1+f'(x)^2}dx.$$
A l'aide de l'exercice 1 et de la méthode des trapèzes en n points, écrire une fonction function l = longCf(f,a,b,n) qui calcule la longueur de la courbe représentative de f sur $[a,b]$.
5. Calculer la longueur de la courbe représentative de la fonction $f(x) = \cosh(x)$ sur $[0, \ln(2)]$ à l'aide de la fonction précédente puis de manière exacte.
6. Proposez un algorithme naturel pour estimer la longueur d'une courbe. Implémentez-le et comparez-le avec la fonction longCf.

Exercice 3 :

Estimer
$$\int_0^1 \int_0^{1-x} e^{-xy^2} dydx$$
à l'aide d'une méthode de Monte-Carlo.