Méthodes numériques
Année : 2018-2019
Formation : L3 Mathématiques

TD 7 : Dérivation et intégration numérique

Exercice 1 : Soit f une fonction réelle de classe C^3 sur $\mathbb{R}$ et $(x_0, h) \in \mathbb{R}^2$. On dispose de la valeur de f aux points x_0, $x_0 - h$ et $x_0 + 2h$.

1. Proposez plusieurs estimations de $f'(x_0)$ avec les ordres associés. Quelle est l'estimation d'ordre maximal ?

2. Proposez une estimation de $f^{(2)}(x_0)$ et déterminer l'ordre associé.

Exercice 2 :

Soit f une fonction réelle de classe C^3 sur $[-1, 1]$. On pose

$$I(f) = \int_{-1}^{1} f(t)dt \quad \text{et} \quad J(f) = \frac{1}{3}(f(-1) + f(1) + 4f(0)).$$

1. Montrez que pour tout polynôme Q de degré inférieur ou égal à 2 on a $I(Q) = J(Q)$

On note P le polynôme d'interpolation de Lagrange de f aux points -1, 0 et 1.

2. Écrivez les polynômes de la base de Lagrange associée à -1, 0 et 1 ainsi que le polynôme P dans cette base.

3. Soit $x \in]-1, 1[\setminus\{0\}$. On pose pour tout $t \in]-1, 1[$,

$$g(t) = f(t) - P(t) - \frac{f(x) - P(x)}{x(x^2 - 1)} t(t^2 - 1).$$

(a) Montrez qu'il existe $\omega \in [-1, 1]$ tel que $g^{(3)}(\omega) = 0$.

(b) En déduire une majoration de $|f(x) - P(x)|$ pour $x \in [-1, 1]$ en fonction de

$$M_3 = \sup\{|f^{(3)}(x)|,\ x \in [-1, 1]\}.$$

(c) Donnez une majoration de $|I(f) - J(f)|$.

Exercice 3 :

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et w une fonction définie sur I à valeurs strictement positives vérifiant

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \forall x \in I,\ \int_I x^n w(x)dx < \infty.$$

Soit $(x_i)_{1 \leq i \leq n}$ une suite de n points 2 à 2 distincts de I. On veut construite une méthode de quadrature de la forme

$$\int_I f(x)w(x)dx \approx \sum_{i=1}^{n} \lambda_i f(x_i).$$

1. Déterminez une condition nécessaire et suffisante sur les λ_i pour que la formule de quadrature soit d'ordre au moins n.

2. En déduire l'existence et l'unicité d'une telle suite $(\lambda_i)_{1 \leq i \leq n}$.