Méthodes numériques
Année : 2018-2019
Formation : L3 Mathématiques

TD 8 : Approximation de solutions d'équations différentielles, schémas numériques

Exercice 1 : Exam 2017-2018, 2ième session

Soit le problème de Cauchy suivant

$$\left\{ \begin{array}{rcl} y'(t) & = & ay(t)(1-y(t)) \\ y(0) & = & y_0 \in \mathbb{R} \end{array} \right.$$

où a est un paramètre positif fixé. On ne cherche pas à calculer explicitement la solution générale de ce problème.

1. Justifier l'existence d'une unique solution maximale pour tout $y_0 \in \mathbb{R}$.

2. On suppose que $y_0 \in]0,1[$. On s'intéresse à l'analyse de méthodes numériques simples pour approcher la solution de ce problème. Ecrire la formule du schéma d'Euler explicite pour approcher la solution $y(t_n)$ de ce problème par une approximation y^n en fonction du pas de temps δt.

3. On suppose que $a\delta t < 1$. Montrer que l'on a pour tout $n \geq 0$, $y^n \in]0,1[$.

4. Montrer que si $a\delta t > 1$, alors il existe une valeur de la donnée initiale $y_0 \in]0,1[$ telle que la première itération y^1 de la méthode d'Euler explicite vérifie $y^1 > 1$. Pourquoi ceci n'est pas satisfaisant ?

5. On propose une nouvelle méthode numérique pour résoudre ce problème :

$$y^{n+1} = y^n + a\delta t y^n(1 - y^{n+1}), \quad \forall n \geq 0.$$

Montrer que si $y^n \in]0,1[$, alors cette formule définit une unique valeur y^{n+1} dont on donnera l'expression en fonction de y^n.

6. Montrer, sans hypothèse sur $a\delta t$, que si $y^n \in]0,1[$, alors on a $y^{n+1} \in]0,1[$.

7. En déduire que pour $y_0 \in]0,1[$, la méthode numérique proposée définit une unique suite de valeurs approchées $(y^n)_{n\in\mathbb{N}}$ qui sont toutes dans l'intervalle $]0,1[$.

8. Que pouvez-vous dire de la stabilité de ce schéma ? Comparer au schéma d'Euler explicite.