Semi-groupes d'opérateurs linéaires

Armentia Julien   Esterle Alexandre   Le Manach Florian

13 mai 2013

Sommaire

Chapitre 1

Introduction

L'objectif principal de ce mémoire est d'étudier les équations d'évolution de la forme $y' = Ay$ avec A un opérateur linéaire non borné sur un espace de Banach complexe X et y une application de $\mathbb{R}^+$ dans X. On rappelle qu'un opérateur linéaire non borné A est un opérateur défini sur un sous-espace vectoriel $D(A)$ de X. Nous chercherons à déterminer des conditions sur A pour que cette équation admette des solutions. Pour cela nous allons introduire les semi-groupes qui sont en quelques sorte une généralisation de la fonction exponentielle.
Dans un premier temps, nous allons développer dans l'introduction le cas où A est un opérateur linéaire borné sur X. Nous observerons la structure des solutions ce qui nous amènera à considérer l'équation fonctionnelle $T(t+s) = T(t)T(s)$ avec $T : \mathbb{R}^+ \to \mathcal{L}(X)$ ayant une certaine régularité. Les semi-groupes seront définis comme étant les solutions de cette dernière équation et vérifiant $T(0) = I$.
Dans une seconde partie, nous étudierons les premières propriétés des semi-groupes. Nous définirons le générateur infinitésimal d'un semi-groupe et nous verrons qu'ils sont solutions de l'équation $y' = Ay$ avec A étant le générateur infinitésimal du semi-groupe.
Dans les troisième et quatrième parties nous allons caractériser les générateurs infinitésimaux de deux classes de semi-groupes ayant une régularité differente.
Pour finir dans la cinquième partie, nous appliquerons la théorie obtenue pour résoudre l'équation de la chaleur.

Notations

E^F : L'ensemble des applications de F dans E.
$\mathcal{L}(X)$: L'ensemble des applications linéaires continues de X dans X avec X un Banach.
X' : Le dual d'un espace de Banach X.
$\mathcal{D}(\Omega)$: L'ensemble des applications de Ω dans $\mathbb{C}$ de classe C^∞ et à support compact.
$\|T\|$: La norme d'un opérateur T dans $\mathcal{L}(X)$.
$\mathrm{Im}(A)$ et $\mathrm{Ker}(A)$: L'image et le noyau de l'opérateur A.
$\rho(A)$ et $\sigma(A)$: L'ensemble résolvant et le spectre d'un opérateur A.
$R(\lambda, A)$: La résolvante de A.
$D(A)$: Le domaine d'un opérateur A.
$W(A)$: L'image numérique d'un opérateur A.
$\mathrm{Re}(z)$: La partie réelle d'un nombre complexe z.
$Arg(z)$: L'argument principal sur $]-\pi, \pi]$ d'un nombre complexe z.

1.1 Équations différentielles linéaires d'ordre 1

Soit X un espace de Banach. On note $\mathcal{L}(X)$ l'ensemble des applications linéaires et continues de X dans X.
Le but de cette section est de résoudre l'équation différentielle $y' = Ay$ avec $A \in \mathcal{L}(X)$ et $y : \mathbb{R}^+ \to X$ vérifiant $y(0) = x$ pour un $x \in X$ donné.

Théorème 1.1.1 (Théorème de Cauchy-Lipschitz linéaire)
Soient $A \in \mathcal{L}(X)$ et $x \in X$.
Il existe une unique application $y : \mathbb{R}^+ \to X$ dérivable sur $\mathbb{R}^+$, vérifiant

$$\begin{cases} y(0) = x \\ y'(t) = Ay(t), \quad \forall t \geq 0. \end{cases} \tag{DE}$$

Il s'agit de la fonction

$$t \mapsto e^{tA}x = \sum_{k=0}^{+\infty} \left(\frac{t^k}{k!} A^k x \right).$$

Démonstration :
Existence
Il est clair que la fonction $t \mapsto e^{tA}x$ vérifie l'équation (DE) car $\frac{\partial}{\partial t} e^{tA} = Ae^{tA}$.
Unicité
Soient ϕ et ψ deux solutions de l'équation différentielle (DE).
Posons $\delta = \phi - \psi$.
On remarque que $\delta(0) = 0$ et $\delta' = A\delta$, donc

$$\forall t \in \mathbb{R}^+, \ \delta(t) = \int_0^t A\delta(u) \mathrm{d}u.$$

Soit $t > 0$. Montrons par récurrence que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \ \forall v \in [0, t], \ \|\delta(v)\| \leq \|A\|^n \frac{v^n}{n!} \sup_{[0,t]} \|\delta\|. \tag{1.1}$$

Cette propriété est vraie pour $n = 0$, supposons qu'elle soit vraie pour $n \in \mathbb{N}$. Soit $v \in [0, t]$.

$$\begin{aligned} \|\delta(v)\| &\leq \int_0^v \|A\delta(u)\| \mathrm{d}u \\ &\leq \|A\| \int_0^v \|A\|^n \frac{u^n}{n!} \sup_{[0,t]} \|\delta\| \mathrm{d}u \\ &\leq \|A\|^{n+1} \frac{v^{n+1}}{(n+1)!} \sup_{[0,t]} \|\delta\|. \end{aligned}$$

Ainsi la propriété (1.1) est vérifiée.
On en déduit donc par passage à la limite ($n \to +\infty$) que $\delta(t) = 0$.
Ceci est vrai pour tout $t > 0$, donc $\delta = 0$ et ainsi $\phi = \psi$. □

Remarque
Soit $T : t \mapsto e^{tA}$.
Le théorème 1.1.1 montre que $\{y : \mathbb{R}^+ \to X, \ y' = Ay\} = \{t \mapsto T(t)x, \ x \in X\}$.
Une des propriétés fondamentales de la fonction exponentielle nous donne la relation fonctionnelle suivante sur T

$$\forall t, s \in \mathbb{R}^+, \ T(t+s) = T(t)T(s) \ \text{ et } \ T(0) = I. \tag{FE}$$

Ainsi T est également solution d'une équation fonctionnelle plus générale car ne supposant pas de régularité infinitésimale.

Dans le cas où A est un opérateur linéaire borné les solutions de (DE) sont également solutions de (FE). Ainsi pour résoudre l'équation (DE), on va s'intéresser aux solutions de (FE).

1.2 Équation fonctionnelle de Cauchy sur $\mathbb{R}$

Cette section a pour but d'étudier les propriétés des solutions de l'équation fonctionnelle (FE) dite de Cauchy dans le cas simple où $X = \mathbb{R}$.
On peut noter que toute application linéaire de $\mathcal{L}(\mathbb{R})$ est une application de multiplication donc $\mathcal{L}(\mathbb{R}) \simeq \mathbb{R}$ et on peut considérer $T : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$.

Les propriétés qui suivent ne seront pas montrées.

Lemme 1.2.1 *Si T une solution de* (FE) *à valeurs dans $\mathbb{R}$, alors T est strictement positive sur $\mathbb{R}^+$.*

Proposition 1.2.2 *T est une solution non nulle de* (FE) *à valeurs dans $\mathbb{R}$ si et seulement si $T = exp \circ f|_{\mathbb{R}^+}$ avec $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une application $\mathbb{Q}$-linéaire.*

Théorème 1.2.3 *Soit T une solution de* (FE) *à valeurs dans $\mathbb{R}$. Les assertions suivantes sont équivalentes.*

(i) T est borné sur un ensemble de mesure (de Lebesgue) non nulle ;

(ii) T est mesurable ;

(iii) T est monotone ;

(iv) T est continue en 0 ;

(v) $\exists a \in \mathbb{R}, \forall t \in \mathbb{R}^+, T(t) = e^{at}$.

De plus, si T vérifie l'une de ces propriétés, T est dérivable et $a = T'(0)$.

Pour $X = \mathbb{R}$, le théorème précédent nous donne une équivalence entre les solutions de l'équation différentielle (DE) : $y' = ay$ et les solutions de l'équation fonctionnelle (FE) : $y(t+s) = y(t)y(s)$ vérifiant $y'(0) = a$.
Le but est maintenant d'établir pour un espace de Banach X quelconque des propriétés sur les opérateurs linéaires A non bornés telles que l'équation (DE) admette des solutions. Pour cela nous allons introduire les semi-groupes, solutions de l'équation (FE).

Chapitre 2

Définitions et premières propriétés

2.1 Définitions

Soit X un espace de Banach sur $\mathbb{C}$. On note $\mathcal{L}(X)$ l'ensemble des applications linéaires et continues de X dans X, et on le munit de la norme uniforme $\|T\| = \sup\limits_{\|x\|=1} \|Tx\|$.

De plus on note $\mathcal{L}(X)^{\mathbb{R}^+}$ l'ensemble des applications de $\mathbb{R}^+$ dans $\mathcal{L}(X)$.

Définition 2.1.1 *On dit que T est un semi-groupe d'opérateurs linéaires bornés si et seulement si $T \in \mathcal{L}(X)^{\mathbb{R}^+}$ et $\forall t \geq 0,\ \forall s \geq 0$,*

$$\begin{cases} T(0) = I \\ T(t+s) = T(t)T(s). \end{cases}$$

On a vu en introduction que l'étude de l'équation fonctionnelle de Cauchy (FE) sur $\mathbb{R}$ faisait intervenir, en cas d'existence, la dérivée des solutions en 0. Ceci motive donc la définition qui suit.

Définition 2.1.2 *Soit T un semi-groupe d'opérateurs linéaires bornés. On définit*

$$D_T = \left\{ x \in X,\ \lim_{\substack{t \to 0 \\ t>0}} \frac{T(t)x - x}{t} \quad \text{existe} \right\}$$

et

$$\begin{array}{rccc} A_T : & D_T & \longrightarrow & X \\ & x & \longmapsto & \lim\limits_{\substack{t \to 0 \\ t>0}} \frac{T(t)x-x}{t} \end{array}.$$

A_T est appelé le générateur infinitésimal du semi-groupe T.

Remarques

D_T est un sous espace vectoriel de X et A_T est une application linéaire.

Dans le cadre des semi-groupes, il se peut que T ne soit pas dérivable en 0 pour la norme uniforme mais que pour certains $x \in X$, l'application $t \mapsto T(t)x$ le soit. Cela n'était pas le cas pour les solutions de (FE) sur $\mathbb{R}$.

Si $x \in D_T$, l'application $t \mapsto T(t)x$ est continue en 0. Nous verrons par la suite qu'un semi-groupe vérifiant cette condition pour tout $x \in X$ s'appelle un C^0-semi-groupe.

2.2 Étude des semi-groupes uniformément continus

Nous allons maintenant imposer des conditions de régularité aux semi-groupes d'opérateurs linéaires bornés. Dans un premier temps, nous allons étudier ceux qui sont continus.
Dans la suite, si T est une application de $\mathbb{R}^+$ dans $\mathcal{L}(X)$. on dira que T est continue (respectivement dérivable) si elle est continue (respectivement dérivable) pour la norme uniforme.

Lemme 2.2.1 *Soit T un semi-groupe d'opérateurs linéaires bornés.*
T est continue sur $\mathbb{R}^+$ si et seulement si T est continue en 0.

Démonstration :
Supposons que T soit continue en 0. Soit $t > 0$.

Pour $h > 0$, $T(t+h) - T(t) = T(t)(T(h) - I)$.
Or $\lim\limits_{h\to 0} T(h) = T(0) = I$. Ainsi,

$$\lim_{\substack{h\to 0\\ h>0}} T(t+h) = T(t).$$

Pour $h < 0$ tel que $t + h > 0$, $T(t+h) - T(t) = T(t+h)(I - T(-h))$.
T est continue en 0, donc il existe $\alpha > 0$ tel que pour tout $x \in [0,\alpha]$, $\|T(x)\| \leq \|I\| + 1 \leq 2$.
Posons $n = E(\frac{t}{\alpha}) + 1$. Ainsi $\|T(t+h)\| \leq \|T(\frac{t+h}{n})\|^n \leq 2^n$. On obtient donc

$$\lim_{\substack{h\to 0\\ h<0}} T(t+h) = T(t).$$

Ainsi T est continue sur $\mathbb{R}^+$. La réciproque est immédiate. $\square$

Définition 2.2.2 *On dit qu'un semi-groupe d'opérateurs linéaires bornés T est uniformément continu si et seulement si T est continue sur $\mathbb{R}^+$.*

L'étude des semi-groupes d'opérateurs linéaires bornés uniformément continus présente de nombreux points communs avec l'étude de solutions continues de l'équation (FE) sur $\mathbb{R}$. On a le résultat suivant :

Théorème 2.2.3 *Soit T un semi-groupe d'opérateurs linéaires bornés. Les assertions suivantes sont équivalentes.*

(i) *T est un semi-groupe d'opérateurs linéaires bornés uniformément continu ;*

(ii) *$A_T \in \mathcal{L}(X)$;*

(iii) *il existe $A \in \mathcal{L}(X)$ tel que pour tout $t \in \mathbb{R}^+$, $T(t) = e^{tA}$.*

Démonstration :
Supposons (i). Montrons que T est dérivable en 0.
T est continue en 0, donc il existe $\delta > 0$ tel que pour tout $s \in [0,\delta]$, on ait $\|I - T(s)\| \leq \frac{1}{2}$.
Ainsi

$$\left\| I - \frac{1}{\delta}\int_0^\delta T(s)\ \mathrm{d}s \right\| \leq \frac{1}{\delta}\int_0^\delta \|I - T(s)\|\ \mathrm{d}s < 1.$$

Il vient que $\int_0^\delta T(s)\ \mathrm{d}s$ est inversible. Ainsi pour tout $t \in \mathbb{R}^+$,

$$T(t) = \left(\int_0^\delta T(s)\ \mathrm{d}s\right)^{-1}\left(\int_0^\delta T(s+t)\ \mathrm{d}s\right) = \left(\int_0^\delta T(s)\ \mathrm{d}s\right)^{-1}\left(\int_t^{\delta+t} T(s)\ \mathrm{d}s\right).$$

Or $t \mapsto \int_t^{\delta+t} T(s)\,\mathrm{d}s$ est dérivable en 0, donc T est dérivable en 0.
Ainsi, $A_T = T'(0) \in \mathcal{L}(X)$.

Supposons (ii). Pour tout $x \in X$, posons $T_x : t \mapsto T(t)x$.
T_x est dérivable en 0 donc pour tout $t \in \mathbb{R}^+$ et $h > 0$,

$$\frac{T(t+h)x - T(t)x}{h} = \frac{T(h)T(t)x - T(t)x}{h} \underset{h\to 0}{\longrightarrow} T_x'(0)T(t)x = A_T T(t)x.$$

Donc T_x est solution de l'équation différentielle $y' = A_T y$ sur $\mathbb{R}^+$ avec $y(0) = x$. Pour tout $x \in X$, par unicité de la solution à ce problème de Cauchy, on obtient que $\forall t \in \mathbb{R}^+,\ T(t)x = e^{tA_T}x$.
Ainsi, il existe $A \in \mathcal{L}(X)$ tel que pour tout $t \in \mathbb{R}^+$, $T(t) = e^{tA}$.

Il est clair que si $A \in \mathcal{L}(X)$ alors $t \mapsto e^{tA}$ est un semi-groupe d'opérateurs linéaires bornés uniformément continu. □

Corollaire 2.2.4 *Tout semi-groupe d'opérateurs linéaires bornés uniformément continu T est dérivable sur $\mathbb{R}^+$ et vérifie l'équation différentielle $y' = A_T y$.*
Réciproquement, l'unique solution de l'équation différentielle $y' = Ay$ sur $\mathbb{R}^+$ avec $A \in \mathcal{L}(X)$ vérifiant $y(0) = I$ est le semi-groupe d'opérateurs linéaires bornés uniformément continu T : $t \mapsto e^{tA}$.

On a donc montré qu'il y a égalité entre l'ensemble des solutions de (DE) avec A borné et l'ensemble des applications $t \mapsto T(t)x$ avec T solution de (FE) continue en 0.
On veut maintenant résoudre l'équation (DE) avec A non borné. On remarque que toute solution de (DE) est dérivable et donc continue. On va donc considérer T solution de (FE) avec $t \mapsto T(t)x$ continu pour tout $x \in X$.

2.3 Étude des C^0-semi-groupes

Définition 2.3.1 *Un semi-groupe d'opérateurs linéaires bornés T est dit fortement continu si et seulement si pour tout $x \in X$, $t \mapsto T(t)x$ est continue en 0. On dit dans ce cas que T est un C^0-semi-groupe.*

Théorème 2.3.2 *Si T est un C^0-semi-groupe alors T est exponentiellement borné, c'est-à-dire*

$$\exists\ \omega \geq 0,\ M \geq 1 \text{ tels que } \forall t \geq 0,\ \|T(t)\| \leq Me^{\omega t}.$$

Démonstration :
Montrons d'abord qu'il existe $\eta > 0,\ M \in \mathbb{R}^+$ tels que pour tout $t \in [0, \eta],\ \|T(t)\| \leq M$.
Supposons le contraire. Alors, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, il existe $t_n \in [0, \frac{1}{n}]$ tel que $\|T(t_n)\| > n$.
Donc, il existe $(t_n)_n \in (\mathbb{R}^+)^{\mathbb{N}}$ telle que $\lim\limits_{n\to\infty} t_n = 0$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\|T(t_n)\| > n$.
Ainsi, $\sup\limits_{n\in\mathbb{N}} \|T(t_n)\| = +\infty$. De plus, il existe $x \in X$ tel que

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} \|T(t_n)x\| = +\infty.$$

En effet, sinon, pour tout $x \in X$, $\sup\limits_{n\in\mathbb{N}} \|T(t_n)x\| < +\infty$.
Or, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $T(t_n) \in \mathcal{L}(X)$ et X est un espace de Banach. Donc, d'après le théorème de Banach-Steinhaus, $\sup\limits_{n\in\mathbb{N}} \|T(t_n)\| < +\infty$, ce qui est absurde.

De plus, on a $\lim\limits_{n\to\infty} \|T(t_n)x - x\| = 0$ car $t_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$.
Et donc, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq N,\ \|T(t_n)x\| \leq 1 + \|x\|$.
Ainsi, $+\infty = \sup\limits_{n\in\mathbb{N}} \|T(t_n)x\| \leq 1 + \|x\| + \max\limits_{n\leq N} \|T(t_n)x\|$, ce qui est absurde.
Donc, il existe $\eta > 0,\ M \geq 0$ tels que pour tout $\forall t \in [0, \eta],\ \|T(t)\| \leq M$.
Comme $\|T(0)\| = 1,\ M \geq 1$. Soit $\omega = \frac{\ln(M)}{\eta}$.
Pour $t \geq 0$, on peut écrire $t = n\eta + \delta,\ n \in \mathbb{N},\ \delta \in [0, \eta]$. On a donc

$$\|T(t)\| = \|T(\delta)T(\eta)^n\| \leq M^{n+1} \leq M M^{t/\eta} = M e^{\omega t}.$$

□

Définition 2.3.3 *On dit qu'un C^0-semi-groupe T est de contraction si et seulement si*

$$\forall t \geq 0,\ \|T(t)\|_{\mathcal{L}(X)} \leq 1.$$

Corollaire 2.3.4 *Si T est un C^0-semi-groupe, alors, $\forall x \in X$, l'application $t \mapsto T(t)x$ est continue sur $\mathbb{R}^+$.*

Démonstration :
Soit $t \in \mathbb{R}^+$. Soit $h \geq 0$. On a

$$\begin{array}{rcl} \|T(t+h)x - T(t)x\| & \leq & \|T(t)\|\ \|T(h)x - x\| \\ & \underset{\substack{h\to 0\\ h\geq 0}}{\longrightarrow} & \|T(t)\|\ \|x - x\| = 0. \end{array}$$

Soit maintenant $h \leq 0$ tel que $t + h \geq 0$.

$$\begin{array}{rcl} \|T(t+h)x - T(t)x\| & \leq & \|T(t+h)\|\ \|x - T(-h)x\| \\ & \leq & M\ e^{\omega(t+h)}\ \|x - T(-h)x\| \\ & \underset{\substack{h\to 0\\ h\leq 0}}{\longrightarrow} & M\ e^{\omega t}\ \|x - x\| = 0. \end{array}$$

On a vérifié la continuité sur $\mathbb{R}^+$ de l'application $t \mapsto T(t)(x)$. □

Remarque
Ce corollaire signifie que $x \mapsto T(t)x$ est continue sur $\mathbb{R}^+$ si et seulement si elle est continue en 0. Cela est très similaire au résultat 2.2.1 sur la continuité de T.

Proposition 2.3.5 *Soit T un C^0-semi-groupe. Alors, pour tout $x \in D_T$ et $t \geq 0$,*

$$T(t)x \in D_T \quad \text{et} \quad \frac{\partial}{\partial t} T(t)x = AT(t)x = T(t)Ax$$

Démonstration :
Soient $x \in D_T$ et $t \geq 0$. Pour $h > 0$, on a

$$\frac{T(t+h)x - T(t)x}{h} = T(t)\frac{T(h)x - x}{h} = \frac{T(h) - I}{h} T(t)x.$$

Comme $T(t) \in \mathcal{L}(X)$ et $h \mapsto T(h)x$ est dérivable en 0, on a

$$\lim_{\substack{h\to 0\\ h>0}} \frac{T(t+h)x - T(t)x}{h} = T(t)A_T x = \lim_{\substack{h\to 0\\ h>0}} \frac{T(h) - I}{h} T(t)x.$$

De plus pour $h < 0$,

$$\frac{T(t+h)x - T(t)x}{h} = T(t+h)\frac{T(-h)x - x}{-h} = \frac{T(-h) - I}{-h}T(t+h)x.$$

Or,

$$\left\| T(t+h)\frac{T(-h)x - x}{-h} - T(t)A_T x \right\| \leq \|T(t+h)\| \left\| \frac{T(-h)x - x}{-h} - T(-h)A_T x \right\|.$$

T est exponentiellement borné et le second terme tend vers 0. Ainsi,

$$\lim_{\substack{h \to 0 \\ h < 0}} \frac{T(t+h)x - T(t)x}{h} = T(t)A_T x = \lim_{\substack{h \to 0 \\ h < 0}} \frac{T(-h) - I}{-h}T(t+h)x.$$

De plus,

$$\begin{aligned} \frac{T(-h) - I}{-h}(T(t+h)x - T(t)x) &= \frac{-(T(t-h)x - T(t)x)}{-h} + \frac{T(t+h)x - T(t)x}{h} \\ &\underset{\substack{h \to 0 \\ h < 0}}{\longrightarrow} T(t)(-A_T x + A_T x) = 0 \end{aligned}$$

d'après ce qui précède. Donc

$$\lim_{\substack{h \to 0 \\ h < 0}} \frac{T(t+h)x - T(t)x}{h} = T(t)A_T x = \lim_{\substack{h \to 0 \\ h < 0}} \frac{T(-h) - I}{-h}T(t)x.$$

Il vient donc que $T(t)x \in D_T$ et on a

$$\frac{\partial}{\partial t}T(t)x = AT(t)x = T(t)Ax.$$

□

On a vu en introduction que le problème de Cauchy (DE) admettait une unique solution lorsque A est un opérateur linéaire borné. Le corollaire suivant généralise ce résultat.

Corollaire 2.3.6 *Si A est le générateur infinitésimal d'un C^0-semi-groupe, alors le problème de Cauchy*

$$\begin{cases} y' = Ay \\ y(0) = x \in D(A) \end{cases} \tag{DE}$$

admet une unique solution sur $\mathbb{R}^+$, celle-ci est donnée par $t \mapsto T(t)x$.

Démonstration :
Existence
L'application $t \mapsto T(t)x$ est solution par la Proposition précédente.
Unicité
Soit u une solution de (DE). Pour $t > 0$ fixé, posons f défini sur $[0,t] \times [0,t]$ par $f(x,y) = T(t-x)u(y)$. L'application $v : s \mapsto f(s,s)$ est dérivable sur $[0,t]$ et pour $s \in [0,t]$ vérifie

$$v'(s) = \frac{\partial}{\partial x}T(t-s)u(s) + T(t-s)u'(s) = -T(t-s)Au(s) + T(t-s)Au(s) = 0$$

Donc v est constante sur $[0,t]$. En particulier, on a $v(t) = v(0)$ et donc $u(t) = T(t)x$, ce qui montre l'unicité de la solution. □

Corollaire 2.3.7 *Soient T et S deux C^0-semi-groupes.*
Si $A_T = A_S$, alors $T = S$.

Nous allons maintenant chercher des conditions nécessaires pour qu'un opérateur linéaire A soit le générateur infinitésimal d'un C^0-semi-groupe.

Rappelons qu'un opérateur A est fermé si et seulement si $\mathcal{G}(A) = \{(x, Ax),\ x \in D(A)\}$ est fermé dans $X \times X$.

Proposition 2.3.8 *Soit T un C^0-semi-groupe de générateur infinitésimal A.*
Alors, A est un opérateur linéaire fermé à domaine dense dans X.

Démonstration :
Soit $x \in X$. Pour tout $t > 0$, on pose $x_t = \frac{1}{t}\int_0^t T(s)x \ \mathrm{d}x$. Soit $h > 0$. On a

$$\begin{aligned}
\frac{T(h) - I}{h} x_t &= \frac{1}{ht}\int_0^t (T(s+h)x - T(s)x)\ \mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{ht}\int_t^{t+h} T(s)x\ \mathrm{d}s - \frac{1}{ht}\int_0^h T(s)x\ \mathrm{d}s \\
&\underset{h\to 0}{\longrightarrow} \frac{T(t)x - x}{t}.
\end{aligned}$$

Donc, pour tout $t > 0$, $x_t \in D(A)$, et $x_t \underset{t\to 0}{\longrightarrow} x$.
Ceci est vrai pour tout $x \in X$. Donc $D(A)$ est dense dans X.

Soit $(x_n)_n \in D(A)^{\mathbb{N}}$ telle que $x_n \to x$ et $Ax_n \to y$.
En intégrant de 0 à t l'égalité de la proposition précédente, on obtient

$$T(t)x - x = \int_0^t AT(s)x\ \mathrm{d}s = \int_0^t T(s)Ax\ \mathrm{d}s.$$

Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$T(t)x_n - x_n = \int_0^t T(s)Ax_n\ \mathrm{d}s.$$

L'intégrande converge uniformément sur des intervalles bornés, on peut donc écrire

$$T(t)x - x = \lim_{n\to\infty}(T(t)x_n - x_n) = \lim_{n\to\infty}\int_0^t T(s)Ax_n\ \mathrm{d}s = \int_0^t \lim_{n\to\infty} T(s)Ax_n\ \mathrm{d}s = \int_0^t T(s)y\ \mathrm{d}s.$$

Enfin, par continuité de T, on a

$$\lim_{\substack{t\to 0\\ t>0}} \frac{T(t)x - x}{t} = \lim_{\substack{t\to 0\\ t>0}} \frac{1}{t}\int_0^t T(s)y\ \mathrm{d}s = y.$$

Donc $x \in D(A)$ et $Ax = y$ puis A est fermé. □

Théorème 2.3.9 *Soit A le générateur infinitésimal d'un C^0-semi-groupe T.*
Si $D(A^n)$ est le domaine de A^n, alors $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} D(A^n)$ est dense dans X.

Démonstration :
Soit $\mathcal{D}(\mathbb{R}_+^*)$ l'ensemble des fonction de $\mathbb{R}_+^*$ dans $\mathbb{C}$ de classe C^∞ et à support compact. Pour tout $x \in X$ et $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}_+^*)$, on pose

$$y = x_\varphi = \int_0^\infty \varphi(s) T(s) x \, \mathrm{d}s.$$

Pour $h > 0$, on a

$$\begin{aligned} \frac{T(h) - I}{h} y &= \frac{1}{h} \int_0^\infty \varphi(s) \left(T(s+h)x - T(s)x \right) \, \mathrm{d}s \\ &= \int_0^\infty \frac{1}{h} \left(\varphi(s-h) - \varphi(s) \right) T(s) x \, \mathrm{d}s. \end{aligned}$$

On a fait le changement de variable $u = s + h$ et pris la convention φ est nulle sur $]-\infty, 0]$.
Quand h tend vers 0, l'intégrande du terme de droite converge uniformément vers $-\varphi'(s)T(s)x$ sur $\mathbb{R}^+$. Donc $y \in D(A)$ et

$$Ay = \lim_{\substack{h \to 0 \\ h > 0}} \frac{T(h) - I}{h} y = \int_0^\infty \lim_{\substack{h \to 0 \\ h > 0}} \frac{1}{h} \left(\varphi(s-h) - \varphi(s) \right) T(s) x \, \mathrm{d}s = - \int_0^\infty \varphi'(s) T(s) x \, \mathrm{d}s.$$

Or pour tout $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}_+^*)$ et $n \in \mathbb{N}$, on a $\varphi^{(n)} \in \mathcal{D}(\mathbb{R}_+^*)$.
Donc, en itérant l'argument précédent, on a que pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $y \in D(A^n)$,

$$A^n y = (-1)^n \int_0^\infty \varphi^{(n)}(s) T(s) x \, \mathrm{d}s$$

et donc que $y \in \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} D(A^n)$.
Soit $Y = \mathit{Vect}\ \{x_\varphi,\ x \in X,\ \varphi \in \mathcal{D}\}$. Y est un sous-espace vectoriel de X et on a montré que pour tout $x \in X$ et $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}_+^*)$, $x_\varphi \in \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} D(A^n)$. Donc $Y \subset \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} D(A^n)$.
Supposons que Y ne soit pas dense. Alors, par le théorème de Hahn-Banach, il existe $\phi \in X' \backslash \{0\}$ telle que pour tout $y \in Y$, $\phi(y) = 0$. On a donc, pour $x \in X$ et $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}_+^*)$,

$$\int_0^\infty \varphi(s) \phi(T(s)x) \, \mathrm{d}s = \phi \left(\int_0^\infty \varphi(s) T(s) x \, \mathrm{d}s \right) = 0.$$

Soit maintenant $x \in X$. La fonction continue $s \mapsto \phi(T(s)x)$ est nulle sur $\mathbb{R}^+$ par le théorème des moments. En particulier, pour $s = 0$, $\phi(x) = 0$. Ceci est vrai pour tout $x \in X$, donc $\phi = 0$, ce qui est absurde.
Ainsi Y est dense et le résultat est vérifié. □

Nous avons vu que si A était le générateur infinitésimal d'un C^0-semi-groupe alors l'équation (DE) admettait une unique solution pour toute condition initiale $y(0) \in D(A)$. De plus pour qu'un opérateur linéaire soit le générateur infinitésimal d'un C^0-semi-groupe il faut qu'il soit fermé et à domaine dense. Mais ce n'est pas suffisant. La prochaine partie donnera deux conditions nécessaire et suffisante sur A pour qu'il génère un C^0-semi-groupe.

Chapitre 3

Caractérisation des générateurs infinitésimaux des C^0-semi-groupes

3.1 Le théorème de Hille-Yosida

Nous avons déterminé certaines propriétés des C^0-semi-groupes et de leur générateur. Nous allons dans cette partie donner une condition nécessaire et suffisante pour qu'un opérateur linéaire non borné soit le générateur d'un C^0-semi-groupe.

Lemme 3.1.1 *Soit A un opérateur linéaire générateur d'un C^0-semi-groupe T.*
Si $\lambda \in \mathbb{C}$ et $\int_0^\infty \|e^{-\lambda t}T(t)\| \, \mathrm{d}t$ est bien définie alors $\lambda I - A$ est inversible et on a

$$R(\lambda) = \int_0^\infty e^{-\lambda t}T(t) \, \mathrm{d}t = (\lambda I - A)^{-1} \in \mathcal{L}(X).$$

Démonstration :
Soient $h > 0$ et $x \in X$,

$$\begin{aligned}
\frac{T(h)-I}{h}R(\lambda)x &= \frac{1}{h}\int_0^\infty e^{-\lambda t}T(t+h)x \, \mathrm{d}t - \frac{1}{h}\int_0^\infty e^{-\lambda t}T(t)x \, \mathrm{d}t \\
&= \frac{1}{h}\int_h^\infty e^{-\lambda(t-h)}T(t)x \, \mathrm{d}t - \frac{1}{h}\int_0^\infty e^{-\lambda t}T(t)x \, \mathrm{d}t \\
&= \frac{e^{\lambda h}-1}{h}\int_0^\infty e^{-\lambda t}T(t)x \, \mathrm{d}t - e^{\lambda h}\frac{1}{h}\int_0^h e^{-\lambda t}T(t)x \, \mathrm{d}t \\
&\underset{h\to 0}{\longrightarrow} \lambda R(\lambda)x - x.
\end{aligned}$$

Ainsi $R(\lambda)x \in D(A)$ et $AR(\lambda)x = \lambda R(\lambda)x - x$ puis $(\lambda I - A)R(\lambda) = I$.
Soit $x \in D(A)$,

$$R(\lambda)Ax = \int_0^\infty e^{-\lambda t}T(t)Ax \, \mathrm{d}t = \int_0^\infty e^{-\lambda t}AT(t)x \, \mathrm{d}t = AR(\lambda)x.$$

Ceci d'après la Proposition 2.3.5 et car A est fermé.
On a donc $(\lambda I - A)R(\lambda) = I$ et $R(\lambda)(\lambda I - A) = I$.
Ainsi, $(\lambda I - A)^{-1} = R(\lambda) \in \mathcal{L}(X)$. □

Dans les lemmes suivants, A sera un opérateur linéaire fermé à domaine dense vérifiant $]0, \infty[\subset \rho(A)$ et pour $\lambda > 0$, $\|(\lambda I - A)^{-1}\| \le \frac{1}{\lambda}$.

Lemme 3.1.2 *Pour tout $x \in X$, on a*

$$\lim_{\lambda \to \infty} \lambda(\lambda I - A)^{-1}x = x.$$

Démonstration :
Soient $x \in D(A)$ et $\lambda > 0$,

$$\|\lambda(\lambda I - A)^{-1}x - x\| = \|(\lambda I - A)^{-1}(\lambda I - (\lambda I - A))x\| \leq \frac{1}{\lambda}\|Ax\|.$$

On a donc, pour tout $x \in D(A)$,

$$\lim_{\lambda \to \infty} \lambda(\lambda I - A)^{-1}x = x. \tag{3.1}$$

Soient $x \in X$ et $\alpha > 0$.
$D(A)$ est dense dans X donc il existe $y \in D(A)$ tel que $\|x - y\| \leq \frac{\alpha}{3}$.
Par (3.1), il existe $\beta > 0$ tel que pour tout $\lambda > \beta, \|\lambda(\lambda I - A)^{-1}y - y\| \leq \frac{\alpha}{3}$.
Ainsi

$$\begin{aligned}
\|\lambda(\lambda I - A)^{-1}x - x\| &\leq \|\lambda(\lambda I - A)^{-1}x - \lambda(\lambda I - A)^{-1}y\| + \|\lambda(\lambda I - A)^{-1}y - y\| + \|y - x\| \\
&\leq 2\|x - y\| + \|\lambda(\lambda I - A)^{-1}y - y\| \\
&\leq \alpha.
\end{aligned}$$

Ainsi $\lim_{\lambda \to \infty} \lambda(\lambda I - A)^{-1}x = x$ □

Définition 3.1.3 *On définit l'approximation de Yosida de A comme la famille des opérateurs bornés $(A_\lambda)_{\lambda > 0}$ définis par*

$$A_\lambda = \lambda A(\lambda I - A)^{-1} = \lambda(-\lambda I + A + \lambda I)(\lambda I - A)^{-1} = -\lambda I + \lambda^2(\lambda I - A)^{-1}.$$

Lemme 3.1.4 *Pour tout $x \in D(A)$, on a*

$$\lim_{\lambda \to \infty} A_\lambda x = Ax.$$

Démonstration :
Soient $x \in D(A)$ et $\lambda > 0$.

$$A(\lambda I - A)^{-1}x = (\lambda I + A - \lambda I)(\lambda I - A)^{-1}x = (\lambda(\lambda I - A)^{-1} - I)x = (\lambda I - A)^{-1}Ax.$$

On a donc $A_\lambda x = \lambda A(\lambda I - A)^{-1}x = \lambda(\lambda I - A)^{-1}Ax$.
D'après le lemme précédent appliqué à Ax, on a le résultat recherché. □

Lemme 3.1.5 *Pour $\lambda > 0$, A_λ est le générateur du semi-groupe d'opérateurs linéaires bornés uniformément continu de contraction $(e^{tA_\lambda})_{t \geq 0}$ et on a*

$$\forall x \in X,\ \forall (\lambda, \mu) \in]0, \infty[^2, \forall t \geq 0,\ \|e^{tA_\lambda}x - e^{tA_\mu}x\| \leq t\|A_\lambda x - A_\mu x\|.$$

Démonstration :
Soit $\lambda > 0$. On a vu que $A_\lambda = \lambda^2(\lambda I - A)^{-1} - \lambda I$ donc A_λ est un opérateur linéaire borné et génère le semi-groupe d'opérateurs linéaires bornés uniformément continu $(e^{tA_\lambda})_{t \geq 0}$.

$$\|e^{tA_\lambda}\| \leq \|e^{t(\lambda^2(\lambda I - A)^{-1} - \lambda I)}\| \leq \|e^{-t\lambda I}\|\ e^{t\lambda^2\|(\lambda I - A)^{-1}\|} \leq e^{-t\lambda}e^{t\lambda} = 1.$$

Ainsi, $(e^{tA_\lambda})_{t\geq 0}$ est un semi-groupe d'opérateurs linéaires bornés uniformément continu de contraction. Soient $\mu > 0$, $t \geq 0$ et $x \in X$.
Les opérateurs $A_\lambda, A_\mu, e^{tA_\lambda}$ et e^{tA_μ} commutent d'après l'équation de la résolvante donc on a

$$\frac{\partial e^{tsA_\lambda} e^{t(1-s)A_\mu} x}{\partial s} = \frac{\partial e^{tA_\mu} e^{ts(A_\lambda - A_\mu)} x}{\partial s} = te^{tA_\mu} e^{st(A_\lambda - A_\mu)}(A_\lambda x - A_\mu x).$$

$$e^{tA_\lambda}x - e^{tA_\mu}x = \int_0^1 \frac{\partial e^{tsA_\lambda} e^{t(1-s)A_\mu} x}{\partial s} \text{ d}s = \int_0^1 te^{tA_\mu} e^{st(A_\lambda - A_\mu)}(A_\lambda x - A_\mu x) \text{ d}s.$$

$$\|e^{tA_\lambda}x - e^{tA_\mu}x\| \leq \int_0^1 t\|e^{tsA_\lambda}\| \|e^{t(1-s)(A_\mu)}\| \|A_\lambda x - A_\mu x\| \text{ d}s.$$

$$\|e^{tA_\lambda}x - e^{tA_\mu}x\| \leq t\|A_\lambda x - A_\mu x\|.$$

□

Ces lemmes permettent de montrer le théorème de Hille-Yosida dans le cas des semi-groupes de contraction énoncé ci-dessous :

Théorème 3.1.6 *(Hille-Yosida pour les semi-groupes de contraction)*
Soit A un opérateur linéaire. Les assertions suivantes sont équivalentes.

(i) A est le générateur d'un C^0-semi-groupe de contraction T ;

(ii) A est fermé, $\overline{D(A)} = X$, $\{z \in \mathbb{C},\ Re(z) > 0\} \subset \rho(A)$ et on a

$$\forall \lambda \in \{z \in \mathbb{C},\ Re(z) > 0\},\ \|(\lambda I - A)^{-1}\| \leq \frac{1}{Re(\lambda)}\ ;$$

(iii) A est fermé, $\overline{D(A)} = X$, $]0, \infty[\ \subset \rho(A)$ et on a

$$\forall \lambda \in\ ]0, \infty[,\ \|(\lambda I - A)^{-1}\| \leq \frac{1}{\lambda}.$$

Démonstration :
Supposons (i). A est fermé et $\overline{D(A)} =$ X d'après la Proposition 2.3.8.
Pour tout $\lambda \in \{z \in \mathbb{C},\ \text{Re}(z) > 0\}$, on a $\|e^{-\lambda t}T(t)\| \leq e^{-\text{Re}(\lambda)t}$.
On peut donc définir pour $\lambda \in \{z \in \mathbb{C},\ \text{Re}(z) > 0\}$, $R(\lambda) = \int_0^\infty e^{-\lambda t}T(t) \text{ d}t$.
$R(\lambda)$ est linéaire et pour tout x dans X, on a

$$\|R(\lambda)x\| \leq \int_0^\infty |e^{-\lambda t}| \|T(t)x\| \text{ d}t \leq \int_0^\infty e^{-\text{Re}(\lambda)t}\|x\| \text{ d}t = \frac{1}{\text{Re}(\lambda)}\|x\|.$$

Pour tout $\lambda \in \{z \in \mathbb{C},\ \text{Re}(z) > 0\}$, on a $\|R(\lambda)\| \leq \frac{1}{\text{Re}(\lambda)}$.
D'après le Lemme 3.1.1, on a $R(\lambda) = (\lambda I - A)^{-1}$ donc $(i) \implies (ii)$.

(ii) implique clairement (iii).

Supposons (iii), on a les résultats des trois lemmes précédents.
Soit $x \in X$, par densité de $D(A)$, il existe une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ qui tend vers x.
Soient $K > 0$, $(n, m, l) \in \mathbb{N}^3$ et $t \in [0, K]$, on a

$$\begin{aligned} \|e^{tA_m}x - e^{tA_n}x\| &\leq \|e^{tA_m}(x - x_l)\| + \|e^{tA_m}x_l - e^{tA_n}x_l\| + \|e^{tA_n}(x - x_l)\| \\ &\leq 2\|x - x_l\| + \|e^{tA_m}x_l - e^{tA_n}x_l\| \\ &\leq 2\|x - x_l\| + K\|A_m x_l - A_n x_l\|. \end{aligned}$$

On a donc convergence uniforme de $(e^{tA_n}x)_{n\in\mathbb{N}}$ sur tout compact et on peut définir $T(t)$ comme l'opérateur de $\mathcal{L}(X)$ tel que

$$T(t)x = \lim_{n\to\infty} e^{tA_n}x.$$

On a que T est un C^0-semi-groupe de contraction car le semi-groupe $t \mapsto e^{tA_n}$ est de contraction. La continuité forte en 0 provient de la convergence uniforme sur $[0, K]$. Il reste à montrer que A est bien son générateur. Soient $x \in D(A)$, $t > 0$,

$$\frac{T(t)x - x}{t} = \lim_{n\to\infty} \frac{e^{tA_n}x - e^{0\times A_n}x}{t} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{t}\int_0^t e^{sA_n}A_nx \text{ d}s$$

$s \mapsto e^{sA_n}A_nx$ converge uniformément vers $s \mapsto T(s)Ax$ sur le compact [0,t] car

$$\|T(s)Ax - e^{sA_n}A_nx\| \leq \|T(s)Ax - e^{sA_n}Ax\| + \|e^{sA_n}(A_nx - Ax)\|.$$

On a donc

$$\frac{T(t)x - x}{t} = \frac{1}{t}\int_0^t \lim_{n\to\infty} e^{sA_n}A_nx \text{ d}s = \frac{1}{t}\int_0^t T(s)Ax \text{ d}s.$$

En passant à la limite quand t tend vers 0, on a $Ax = A_Tx$ et $D(A) \subset D(A_T)$. D'après le premier sens de l'équivalence du théorème, on a $]0, \infty[\subset \rho(A_T)$. Soit $x \in D(A_T)$, il existe $y \in X$ tel que $x = (I - A_T)^{-1}y$ et il existe $z \in D(A)$ tel que $y = (I - A)z$.
$x = (I - A_T)^{-1}(I - A)z = (I - A_T)^{-1}(I - A_T)z = z$.
On a donc $D(A_T) \subset D(A)$ puis $D(A) = D(A_T)$ et $A = A_T$. □

Remarque
On vient de trouver une condition sur A telle que l'équation (DE) admette une unique solution. De plus, cette solution est limite uniforme des solutions de $y' = A_\lambda y$, quand $\lambda \to \infty$ avec A_λ les approximations de Yosida de A.

D'après le Théorème 2.3.2, pour tout C^0-semi-groupe T il existe deux réels M et ω tels que pour tout $t \geq 0, \|T(t)\| \leq Me^{\omega t}$. Le théorème suivant caractérise les générateurs infinitésimaux de C^0-semi-groupes quelconques.

Théorème 3.1.7 *(Hille-Yosida)*
Soit A un opérateur linéaire non borné. Les assertions suivantes sont équivalentes.

(i) A est le générateur d'un C^0-semi-groupe T vérifiant

$$\forall t \geq 0, \|T(t)\| \leq Me^{\omega t} \;;$$

(ii) A est fermé, $\overline{D(A)} = X$, $\{z \in \mathbb{C}, Re(z) > \omega\} \subset \rho(A)$ et on a

$$\forall \lambda \in \{z \in \mathbb{C},\ Re(z) > \omega\},\ \forall n \in \mathbb{N},\ \|(Re(\lambda) - \omega)^n(\lambda I - A)^{-n}\| \leq M \;;$$

(iii) A est fermé, $\overline{D(A)} = X$, $]\omega, \infty[\ \subset \rho(A)$ et on a

$$\forall \lambda \in]\omega, \infty[,\ \forall n \in \mathbb{N},\ \|(\lambda - \omega)^n(\lambda I - A)^{-n}\| \leq M.$$

Démonstration :
Supposons (i). D'après la Proposition 2.3.8 A_T est fermé et $\overline{D(A_T)} = X$.
Soit S définie par

$$\begin{array}{rccc} S: & [0, \infty[& \longrightarrow & \mathcal{L}(X) \\ & t & \longmapsto & e^{-\omega t}T(t). \end{array}$$

S est aussi un semi-groupe fortement continu et on a $A_S = -\omega I + A_T$.
Soit $\lambda \in \{z \in \mathbb{C} : \mathrm{Re}(z) > 0\}$, pour tout $t \geq 0$, $\|e^{-\lambda t}S(t)\| \leq Me^{-\mathrm{Re}(\lambda)t}$.
On peut donc définir l'intégrale $R(\lambda)$ comme précédemment pour le semi-groupe S pour tout λ dans $\{z \in \mathbb{C} : \mathrm{Re}(z) > 0\}$ et on a $R(\lambda) = (\lambda I - A_S)^{-1}$. Ainsi $\{\mu \in \mathbb{C} : \mathrm{Re}(\mu) > 0\} \subset \rho(A_S)$.
De plus, $\lambda \in \rho(A_S) \Leftrightarrow \lambda I - A_S$ inversible $\Leftrightarrow (\lambda + \omega)I - A_T$ inversible $\Leftrightarrow \lambda + \omega \in \rho(A_T)$. On a donc $\{\mu \in \mathbb{C} : \mathrm{Re}(\mu) > \omega\} \subset \rho(A_T)$.
Montrons que l'on a l'inégalité demandée.
D'après l'équation de la résolvante, on a pour tout $(\lambda, \mu) \in (\rho(A_S))^2$,

$$R(\lambda, A_S) - R(\mu, A_S) = (\mu - \lambda)R(\lambda, A_S)R(\mu, A_S).$$

On a donc $\frac{\partial R(\lambda, A_S)}{\partial \lambda} = -R(\lambda, A_S)^2$.
Par récurrence, on a pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\frac{\partial^n R(\lambda, A_S)}{\partial \lambda^n} = (-1)^n n! R(\lambda, A_S)^{n+1}.$$

Soient $\lambda \in \{\mu \in \mathbb{C} : \mathrm{Re}(\mu) > \omega\}$ et $n \in \mathbb{N}$.
$\mathrm{Re}(\lambda - \omega) > 0$ donc $\lambda - \omega \in \rho(A_S)$.
Si n = 0, on a l'inégalité car $M \geq 1$. Supposons $n \geq 1$.

$$\frac{\partial^n R(\lambda - \omega, A_S)}{\partial \lambda^n} = \frac{\partial^n}{\partial \lambda^n} \int_0^\infty e^{-(\lambda - \omega)t} S(t)\, \mathrm{d}t = \frac{\partial^n}{\partial \lambda^n} \int_0^\infty e^{-\lambda t} T(t)\, \mathrm{d}t.$$

L'application $t \mapsto (-t)^n e^{-\lambda t} T(t)$ est intégrable, on peut donc rentrer la dérivée dans l'intégrale.

$$\begin{aligned} \|(\lambda I - A_T)^{-n}\| &= \|((\lambda - \omega)I - A_S)^{-n}\| \leq \left\| \frac{(-1)^{n-1}}{(n-1)!} \int_0^\infty (-t)^{n-1} e^{-\lambda t} T(t)\, \mathrm{d}t \right\|. \\ \|(\lambda I - A_T)^{-n}\| &\leq \frac{M}{(n-1)!} \int_0^\infty t^{n-1} e^{-(\mathrm{Re}(\lambda) - \omega)t}\, \mathrm{d}t. \end{aligned}$$

Pour tout $m \in \mathbb{N}$ vérifiant $m \geq 2$, on a à l'aide d'une intégration par parties,

$$\begin{aligned} \int_0^\infty t^{m-1} e^{-(\mathrm{Re}(\lambda) - \omega)t}\, \mathrm{d}t &= \left[\frac{t^{m-1} e^{-(\mathrm{Re}(\lambda) - \omega)t}}{\omega - \mathrm{Re}(\lambda)} \right]_0^\infty + \frac{(m-1)}{\mathrm{Re}(\lambda) - \omega} \int_0^\infty t^{m-2} e^{-(\mathrm{Re}(\lambda) - \omega)t}\, \mathrm{d}t. \\ &= \frac{(m-1)}{\mathrm{Re}(\lambda) - \omega} \int_0^\infty t^{m-2} e^{-(\mathrm{Re}(\lambda) - \omega)t}\, \mathrm{d}t. \end{aligned}$$

Puis par récurrence,

$$\int_0^\infty t^{m-1} e^{-(\mathrm{Re}(\lambda) - \omega)t}\, \mathrm{d}t = \frac{(m-1)!}{(\mathrm{Re}(\lambda) - \omega)^{m-1}} \int_0^\infty e^{-(\mathrm{Re}(\lambda) - \omega)t}\, \mathrm{d}t = \frac{(m-1)!}{(\mathrm{Re}(\lambda) - \omega)^n}.$$

On a donc $\|(\mathrm{Re}(\lambda) - \omega)^n (\lambda I - A_T)^{-n}\| \leq M$.

L'implication $(ii) \implies (iii)$ est claire.

Supposons (iii). Soit $B = A - \omega I$.
On va définir une nouvelle norme afin de se ramener au cas des semi-groupes de contraction.
Pour $\mu > 0$, on définit $\|.\|_\mu$ par $\|x\|_\mu = \sup_{n \in \mathbb{N}} \|\mu^n (\mu I - B)^{-n} x\|$, pour tout $x \in X$.
Pour tout $\mu > 0$, $\|.\|_\mu$ définit bien une norme et on a
(1) $\forall x \in X, \ \|x\| \leq \|x\|_\mu \leq M\|x\|$;

(2) $\forall \lambda \in]0,\mu],\ \|\lambda(\lambda I - B)^{-1}\|_\mu \leq 1$;

(3) $\forall x \in X,\ \forall \lambda \in]0,\mu],\ \|x\|_\lambda \leq \|x\|_\mu$.

On a (1) car pour tout $x \in X$. $\|x\| = \|\mu^0(\mu I - B)^{-0}x\| \leq \|x\|_\mu \leq M\|x\|$.
Montrons (2). Pour tout $x \in X, \|\mu(\mu I - B)^{-1}x\|_\mu = \sup\limits_{n\in\mathbb{N}}\|\mu^{n+1}(\mu I - B)^{-n-1}x\| \leq \|x\|_\mu$ donc

$$\|\mu(\mu I - B)^{-1}\|_\mu \leq 1.$$

Soit $\lambda \in]0,\mu]$. D'après l'équation de la résolvante,

$$\begin{array}{rcl} \|\lambda(\lambda I - B)^{-1}x\|_\mu & = & \|\lambda(\mu I - B)^{-1}x + \lambda(\mu-\lambda)(\mu I - B)^{-1}(\lambda I - B)^{-1}x\|_\mu \ ; \\ \|\lambda(\lambda I - B)^{-1}x\|_\mu & \leq & \dfrac{\lambda}{\mu}\|x\|_\mu + \dfrac{\mu-\lambda}{\mu}\|\lambda(\lambda I - B)^{-1}x\|_\mu. \end{array}$$

Ceci car $\|\mu(\mu I - B)^{-1}\|_\mu \leq 1$. On obtient (2) en regroupant les $\|\lambda(\lambda I - B)^{-1}x\|_\mu$.
On a (3) car pour tout $x \in X,\ \|x\|_\lambda = \sup\limits_{n\in\mathbb{N}}\|\lambda^n(\lambda I - B)^{-n}x\| \leq \sup\limits_{n\in\mathbb{N}}\|\lambda^n(\lambda I - B)^{-n}x\|_\mu \leq \|x\|_\mu$ d'après (1) et (2).
Pour tout $x \in X$, $(\|x\|_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est une suite croissante et majorée par $M\|x\|$.
On peut donc définir la norme $\|.\|_\wp$ par $\|x\|_\wp = \lim\limits_{n\to\infty}\|x\|_n$.
Cette norme est bien définie et vérifie $\|x\| \leq \|x\|_\wp \leq M\|x\|$.
Soit $\lambda > 0$. $\|\lambda(\lambda I - B)^{-1}x\|_\wp = \lim\limits_{n\to\infty}\|\lambda(\lambda I - B)^{-1}x\|_n = \lim\limits_{\substack{n\to\infty \\ n\geq\lambda}}\|\lambda(\lambda I - B)^{-1}x\|_n \leq \|x\|_\wp$.
Comme $\|.\|_\wp$ et $\|.\|$ sont équivalentes, B est fermé et à domaine dense pour la norme $\|.\|_\wp$.
D'après le théorème de Hille-Yosida, B génère un C^0-semi-groupe de contraction S pour la norme $\|.\|_\wp$.
Pour tout $x \in X$, $t \in \mathbb{R}^+$, $\|S(t)x\| \leq \|S(t)x\|_\wp \leq \|x\|_\wp \leq M\|x\|$.
Si T est défini par

$$T: \begin{array}{ccc} [0,\infty[& \longrightarrow & \mathcal{L}(X) \\ t & \longmapsto & e^{\omega t}S(t) \end{array},$$

alors A génère le C^0-semi-groupe T et on a pour tout $t \in \mathbb{R}^+, \|T(t)\| = \|S(t)e^{\omega t}\| \leq Me^{\omega t}$. $\square$

3.2 Le théorème de Lumer-Phillips

Soient X un espace de Banach et X' son dual.
Pour $x \in X,\ x \neq 0$, on note $F(x)$ l'ensemble $\{\phi \in X', \phi(x) = \|x\|\ et \|\phi\| = 1\}$ et $F(0) = \{0_{X'}\}$.
$F(x)$ est non vide d'après le théorème de Hahn-Banach.

Définition 3.2.1 *On dit qu'un opérateur linéaire A est dissipatif si et seulement si*

$$\forall x \in D(A),\ \exists \phi \in F(x),\ Re(\phi(Ax)) \leq 0.$$

Proposition 3.2.2 *Si un opérateur A est dissipatif alors A vérifie*

$$\forall x \in D(A),\ \forall \lambda > 0,\ \|(\lambda I - A)x\| \geq \lambda\|x\|. \tag{3.2}$$

Démonstration :
Soient A dissipatif, $x \in D(A)$, $\lambda > 0$ et $\phi \in F(x)$ telle que $\mathrm{Re}(\phi(Ax)) \leq 0$, on a
$\lambda\|x\| = \mathrm{Re}(\lambda\phi(x)) \leq \mathrm{Re}(\lambda\phi(x)) - \mathrm{Re}(\phi(Ax)) = \mathrm{Re}(\phi(\lambda x - Ax)) \leq |\phi(\lambda x - Ax)| \leq \|(\lambda I - A)x\|$.
$\square$

Remarque
On peut montrer la réciproque à l'aide du théorème de Banach-Alaoglu. Dans la suite, on utilisera (3.2) comme définition.

Jusqu'ici, on a travaillé avec des opérateurs fermés. On va se donner un cadre plus général en travaillant sur des opérateurs qui peuvent se prolonger en opérateur fermé. On va donc étudier quelques propriétés de ces opérateurs.

On note $\mathcal{G}(A)$ le graphe d'un opérateur A, c'est-à-dire $\mathcal{G}(A) = \{(x, Ax),\ x \in D(A)\}$.
On note p_1 la projection de $X \times X \to X$ donnée par $p_1(x, y) = x$.

On dit que B est une extension de A si B est un opérateur vérifiant $D(A) \subset D(B)$ et $Ax = Bx$ pour tout $x \in D(A)$.

Définition 3.2.3 *On dit qu'un opérateur A est fermable s'il possède une extension fermée.*

Proposition 3.2.4 *Un sous-espace vectoriel $\mathcal{G}$ de $X \times X$ est le graphe d'un opérateur A si et seulement si*

$$(0, y) \in \mathcal{G} \implies y = 0.$$

Démonstration :
Supposons que $(0, y) \in \mathcal{G} \Rightarrow y = 0$. Si $(x, y_1) = (x, y_2)$ alors $y_1 = y_2$. On peut donc définir une application A de $p_1(\mathcal{G})$ dans X qui à $x \in p_1(\mathcal{G})$ associe l'unique y dans X tel que $(x, y) \in \mathcal{G}$.
De plus A est un opérateur car $\mathcal{G}$ est un espace vectoriel.
L'autre implication est issue du fait que $A(0) = 0$ pour tout opérateur linéaire A. □

Proposition 3.2.5 *Si A est fermable alors A possède une plus petite extension fermée notée $\overline{A}$ et définie par $\mathcal{G}(\overline{A}) = \overline{\mathcal{G}(A)}$.*

Démonstration :
Soient A un opérateur fermable et B une extension fermée de A, on a $\mathcal{G}(A) \subset \mathcal{G}(B)$ et $\mathcal{G}(B)$ fermé car B est fermé. On a donc $\overline{\mathcal{G}(A)} \subset \mathcal{G}(B)$ et si $(0, y) \in \overline{\mathcal{G}(A)}$ alors $y = 0$ donc $\overline{\mathcal{G}(A)}$ est bien le graphe d'un opérateur. □

Corollaire 3.2.6 *A est fermable si et seulement si pour tout $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \in D(A)^{\mathbb{N}}$ telle que $x_n \to 0$ et $Ax_n \to z$, on a $z = 0$.*

Démonstration :
$\overline{\mathcal{G}(A)}$ est le graphe d'un opérateur si et seulement si il vérifie la condition donnée par la Proposition 3.2.4 qui est celle énoncée dans le corollaire.
La proposition précédente montre que si A est fermable alors $\overline{\mathcal{G}(A)}$ est le graphe d'un opérateur.
Si $\overline{\mathcal{G}(A)}$ est le graphe d'un opérateur, cet opérateur est fermé et c'est une extension de A donc A est fermable. □

Proposition 3.2.7 *Soit A un opérateur linéaire dissipatif. On a les propriétés suivantes :*
- *si A est fermable alors $\overline{A}$ est dissipatif;*
- *si $\overline{D(A)} = X$ alors A est fermable.*

Démonstration :
Supposons que A soit fermable. Soient $x \in D(\overline{A})$, $y = \overline{A}x$. Il existe $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in D(A)^{\mathbb{N}}$, telle que $x_n \to x$ et $Ax_n \to y$. Soient $\lambda > 0, n \in \mathbb{N}$.

$$\|\lambda x_n - Ax_n\| \geq \lambda \|x_n\|.$$

En passant à la limite quand n tend vers l'infini, on a

$$\|\lambda x - \overline{A}x\| \geq \lambda \|x\|$$

ce qui montre la premières assertion. Montrons la seconde assertion.
Supposons que A ne soit pas fermable.
Il existe $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in D(A)^{\mathbb{N}}$ telle que $x_n \to 0$ et $Ax_n \to z$ avec $\|z\| = 1$.
Pour tout $t > 0$, $x \in D(A)$, et $n \in \mathbb{N}$, on a

$$\left\|\frac{1}{t}\left(x + \frac{1}{t}x_n\right) - A\left(x + \frac{1}{t}x_n\right)\right\| \geq \frac{1}{t}\left\|x + \frac{1}{t}x_n\right\|$$

$$\left\|x + \frac{1}{t}x_n - tA\left(x + \frac{1}{t}x_n\right)\right\| \geq \left\|x + \frac{1}{t}x_n\right\|.$$

En passant à la limite quand $n \to \infty$, on obtient

$$\|x - tAx - z\| \geq \|x\|.$$

En passant à la limite quand $t \to 0$, on a

$$\|x - z\| \geq \|x\|.$$

$D(A)$ ne peut donc pas être dense dans X, ce qui contredit l'hypothèse. A est donc fermable. □

On va maintenant donner une condition de génération de semi-groupes pour les opérateurs dissipatifs à l'aide du Théorème de Hille-Yosida.

Théorème 3.2.8 *(Lumer-Phillips)*
Soit A un opérateur linéaire à domaine dense. Alors,
- *si A est dissipatif et s'il existe $\lambda_0 > 0$ tel que $\overline{Im(\lambda_0 I - A)} = X$, alors $\overline{A}$ génère un C^0-semi-groupe de contraction sur X ;*
- *si A génère un C^0-semi-groupe de contraction sur X, alors pour tout $\lambda > 0$, $Im(\lambda I - A) = X$ et A est dissipatif.*

Démonstration :
A est dissipatif et à domaine dense donc A est fermable.
Nous allons montrer tout d'abord que $\mathrm{Im}(\lambda_0 I - \overline{A}) = X$.
Soit $(\lambda_0 x_n - Ax_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de $\mathrm{Im}(\lambda_0 I - A)$ qui converge vers un z. On a, pour tout $(n, m) \in \mathbb{N}^2$,

$$\|x_n - x_m\| \leq \frac{1}{\lambda_0}\|(\lambda_0 x_n - Ax_n) - (\lambda_0 x_m - Ax_m)\|.$$

La suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge donc vers $x \in X$, de même que $(Ax_n)_{n\in\mathbb{N}}$ car $Ax_n = \lambda_0 x_n - (\lambda_0 x_n - Ax_n)$.
On a donc $z = \lambda_0 x - \overline{A}x$ puis $X = \overline{\mathrm{Im}(\lambda_0 I - A)} \subset \mathrm{Im}(\lambda_0 I - \overline{A})$.
Reste à montrer que $]0, \infty[\ \subset \rho(\overline{A})$ pour utiliser le théorème de Hille-Yosida pour les contractions, on aura l'inégalité grâce à la dissipativité.

Montrons que $\rho(\overline{A}) \cap \mathbb{R}_+^*$ est ouvert et fermé dans $\mathbb{R}_+^*$.
$\rho(\overline{A})$ est ouvert donc son intersection avec $\mathbb{R}_+^*$ est ouverte.
Soit $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite dans $\rho(\overline{A}) \cap \mathbb{R}_+^*$ qui converge vers un $\lambda > 0$.
Soit $y \in X$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe $x_n \in D(\overline{A})$ tel que $y = \lambda_n x_n - \overline{A}x_n$.
On a $\lambda_n\|x_n\| \leq \|\lambda_n x_n - \overline{A}x_n\|$ donc $\|x_n\| \leq \frac{1}{\lambda_n}\|y\|$.
$(\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers un réel strictement positif donc il existe $c > 0$ tel que pour tout $n \in \mathbb{N}, \lambda_n \geq c$ donc $\|x_n\| \leq \frac{1}{c}\|y\|$. Soit $(n, m) \in \mathbb{N}^2$, on a

$$\lambda_n\|x_n - x_m\| \leq \|\lambda_n(x_n - x_m) - \overline{A}(x_n - x_m)\| = \|y + (\lambda_m - \lambda_n)x_m - y\| \leq |\lambda_n - \lambda_m|\frac{\|y\|}{c}$$

.

$$\|x_n - x_m\| \leq |\lambda_n - \lambda_m|\frac{\|y\|}{c^2}.$$

La suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers un x et, comme $y = \lambda_n x_n - \overline{A}x_n$, $(\overline{A}x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge aussi.
Comme $\overline{A}$ est fermé, $y = \lambda x - \overline{A}x$. De plus, $\lambda I - \overline{A}$ est injectif, et l'inverse est borné par dissipativité donc $\rho(\overline{A}) \cap \mathbb{R}_+^*$ est fermé dans $\mathbb{R}_+^*$.
Comme $\lambda_0 \in \rho(\overline{A}) \cap \mathbb{R}_+^*$, c'est un ensemble non vide ouvert et fermé dans $\mathbb{R}_+^*$ donc $\mathbb{R}_+^* \subset \rho(\overline{A})$.
D'après le Théorème de Hille-Yosida, $\overline{A}$ génère un C^0-semi-groupe de contraction.
Réciproquement, supposons que A génère un C^0-semi-groupe de contraction T.
On a $\mathbb{R}_+^* \subset \rho(A)$ donc pour tout $\lambda > 0$, $\mathrm{Im}(\lambda I - A) = X$. Soient $x \in D(A),\ x \neq 0$ et $\phi \in F(x)$.
Pour tout $t > 0$, $|\phi(T_t x)| \leq \|\phi\|\|T_t x\| \leq \|x\|$ donc $\mathrm{Re}(\frac{1}{t}\phi(T_t x - x)) = \frac{1}{t}(\mathrm{Re}(\phi(T_t x)) - \|x\|) \leq 0$.
En passant à la limite quand t tend vers 0, on obtient $\mathrm{Re}(\phi(Ax)) \leq 0$.
A est donc dissipatif. □

Corollaire 3.2.9 *Si A est fermé et à domaine dense alors : A est le générateur infinitésimal d'un C^0-semi-groupe de contraction si et seulement si A est dissipatif et s'il existe $\lambda_0 > 0$ tel que Im$(\lambda_0 I - A)$ soit dense.*

Démonstration :
Le corollaire découle directement du Théorème précédent et du fait que si A est fermé alors A est fermable et $\overline{A} = A$. □

Corollaire 3.2.10 *Si A est dissipatif, à domaine dense et vérifie $\rho(A) \cap \mathbb{R}_+^* \neq \varnothing$, alors pour tout $x \in D(A)$, le problème de Cauchy*

$$\begin{cases} y(0) = x \\ y'(t) = Ay(t), \quad \forall t \geq 0 \end{cases} \tag{DE}$$

admet une unique solution u qui vérifie $\|u(t)\| \leq \|x\|$ pour tout $t \geq 0$.

Démonstration :
L'opérateur A est dissipatif, à domaine dense et il existe $\lambda_0 > 0$ tel que $\mathrm{Im}(\lambda_0 I - A) = X$ car $\rho(A) \cap \mathbb{R}_+^* \neq \varnothing$.
Montrons que A est fermé. Soient $z \in \rho(A)$ et $(x_n) \in D(A)^{\mathbb{N}}$ qui vérifie $x_n \to x$ et $Ax_n \to y$.
Comme $z \in \rho(A)$, l'opérateur $(zI - A)^{-1}$ est continu et on a

$$x_n = (zI - A)^{-1}(zx_n - Ax_n) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} (zI - A)^{-1}(zx - y) = x.$$

Ainsi $x \in D(A)$ et $y = Ax$ ce qui montre que A est fermé.
L'opérateur A génère donc, par le Corollaire 3.2.9, un C^0-semi-groupe de contraction T. On obtient ainsi le résultat souhaité grâce au Corollaire 2.3.6. □

Chapitre 4

Semi-groupes holomorphes

Ce chapitre est consacré à l'étude de semi-groupes ayant une propriété de régularité plus forte. On aura ainsi une caractérisation du générateur infinitésimal plus simple que dans le Théorème de Hille-Yosida où l'on devait estimer toutes les puissances de la résolvante.

Nous allons étendre la définition des semi-groupes sur un secteur de $\mathbb{C}$.

4.1 Caractérisation des semi-groupes holomorphes bornés

Définition 4.1.1 *On appelle secteur d'angle δ l'ensemble Σ_δ de $\mathbb{C}$ défini par*

$$\Sigma_\delta = \{z \in \mathbb{C}^*,\ |Arg(z)| < \delta\}.$$

Définition 4.1.2 *Soit $\delta \in \,]0, \frac{\pi}{2}]$.*
On dit que T est un semi-groupe holomorphe d'angle δ si et seulement si $T : \Sigma_\delta \cup \{0\} \to \mathcal{L}(X)$ vérifie

(i) $T(0) = I$ *et* $\forall z_1, z_2 \in \Sigma_\delta,\ T(z_1 + z_2) = T(z_1)T(z_2)$ *;*

(ii) T *est holomorphe sur* Σ_δ *;*

(iii) $\forall \delta' \in]0, \delta[,\ \forall x \in X,\ \lim\limits_{\substack{z\to 0\\ z\in\Sigma_{\delta'}}} T(z)x = x.$

De plus, si T vérifie

(iv) $\forall \delta' \in]0, \delta[,\ \exists M > 0,\ \forall z \in \Sigma_{\delta'},\ \|T(z)\| \leq M,$

on dit que T est un semi-groupe holomorphe borné.
On appelle générateur infinitésimal du semi-groupe T le générateur infinitésimal du semi-groupe $T|_{\mathbb{R}^+}$.

Définition 4.1.3 *Soit A un opérateur linéaire fermé à domaine $D(A)$ dense.*
On dit que A est δ-sectoriel ($\delta \in]0, \frac{\pi}{2}]$) si et seulement si

$$\Sigma_{\frac{\pi}{2}+\delta} \subset \rho(A)$$

et

$$\forall \varepsilon \in]0, \delta[,\ \exists M_\varepsilon \geq 1,\ \forall \lambda \in \overline{\Sigma_{\frac{\pi}{2}+\delta-\varepsilon}} \setminus \{0\},\quad \|(\lambda I - A)^{-1}\| \leq \frac{M_\varepsilon}{|\lambda|}.$$

Théorème 4.1.4 *Un opérateur linéaire A génère un semi-groupe holomorphe borné d'angle δ si et seulement si A est δ-sectoriel.*

Démonstration :
Supposons d'abord que A soit δ-sectoriel. Nous allons construire un semi-groupe holomorphe borné d'angle δ.
Soit T vérifiant $T(0) = I$ et défini sur Σ_δ par

$$T : z \mapsto \frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma_z} e^{\mu z} (\mu I - A)^{-1} \, \mathrm{d}\mu. \tag{4.1}$$

$\gamma_z : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ étant un chemin continu à image dans $\Sigma_{\frac{\pi}{2}+\delta}$ et vérifiant

$$\exists \delta' \in \,]|Arg(z)|, \delta[, \quad \gamma_z(t) \underset{\pm\infty}{\sim} |t| e^{i \frac{t}{|t|} \left(\frac{\pi}{2} + \delta'\right)}. \tag{4.2}$$

Dans cette définition, T dépend à priori du chemin γ.
Nous allons dans un premier temps montrer que T est bien défini pour un chemin précis, puis que T ne dépend pas du chemin choisi.

Plus précisément, $\forall z \in \Sigma_\delta$, soit Γ_z la concaténation des chemins Γ_z^1, Γ_z^2, Γ_z^3 où

$$\begin{array}{llcl}
\Gamma_z^1 : & \left]-\infty, -\frac{1}{|z|}\right] & \longrightarrow & \mathbb{C} \\
 & t & \longmapsto & -t e^{-i\left(\frac{\pi}{2}+\delta'\right)} \\[1em]
\Gamma_z^2 : & \left[-\frac{\pi}{2} - \delta', \frac{\pi}{2} + \delta'\right] & \longrightarrow & \mathbb{C} \\
 & \theta & \longmapsto & \frac{1}{|z|} e^{i\theta} \\[1em]
\Gamma_z^3 : & \left[\frac{1}{|z|}, +\infty\right[& \longrightarrow & \mathbb{C} \\
 & t & \longmapsto & t e^{i\left(\frac{\pi}{2}+\delta'\right)}
\end{array}$$

avec $\delta' = \delta - \varepsilon$ pour un $\varepsilon \in \left]0, \frac{\delta - |Arg(z)|}{2}\right[$ fixé.

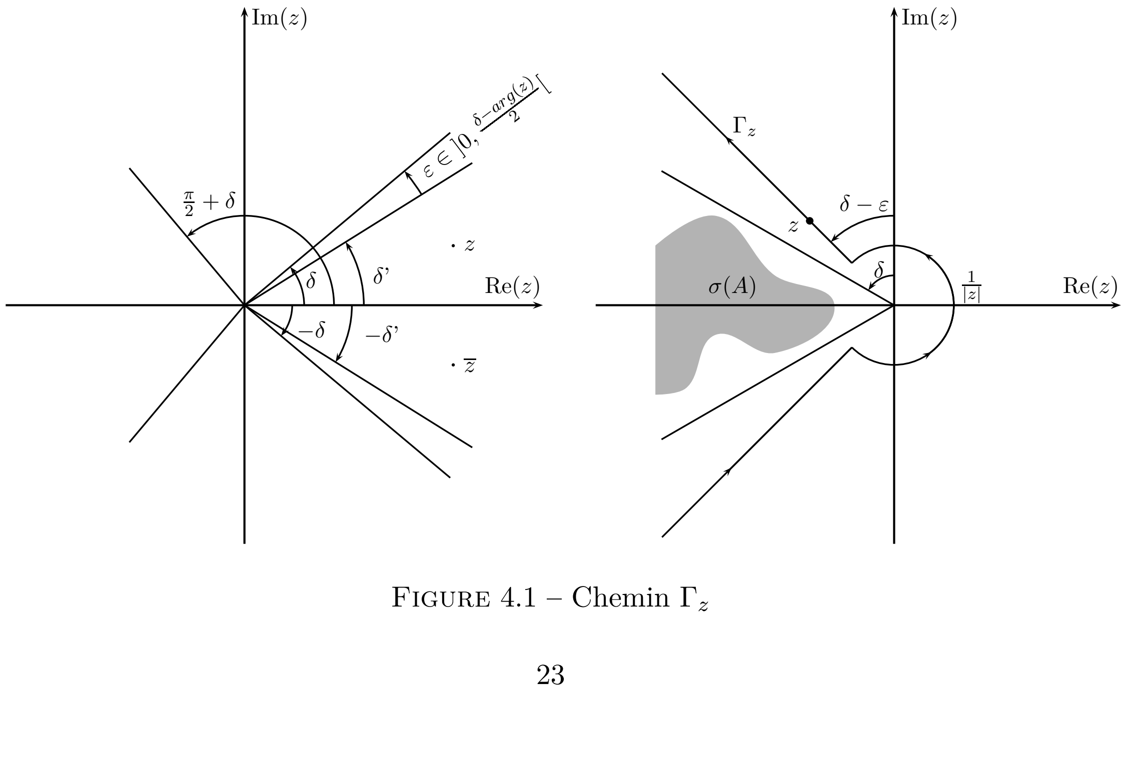

Figure 4.1 – Chemin Γ_z

Commençons par remarquer l'inégalité suivante, qui sera très importante par la suite.

$$-\frac{3\pi}{2}+\varepsilon \leq Arg(z)-\frac{\pi}{2}-\delta+\varepsilon \leq -\frac{\pi}{2}-\varepsilon. \tag{4.3}$$

Elle résulte d'une part de $-\pi \leq Arg(z)-\delta$ et d'autre part de $2\varepsilon \leq \delta - Arg(z)$.

Montrons que les trois intégrales définissant $T(z)$ pour Γ_z existent.
A étant δ-sectoriel, il existe $M \geq 1$, pour tout $\lambda \in \overline{\Sigma_{\frac{\pi}{2}+\delta'}} \setminus \{0\}$, $\|(\lambda I - A)^{-1}\| \leq \frac{M}{|\lambda|}$. Ainsi,

$$\begin{aligned}
\left\|\int_{\Gamma_z^1} e^{\mu z}(\mu I - A)^{-1}\,\mathrm{d}\mu\right\| &\leq \int_{-\infty}^{-\frac{1}{|z|}} e^{-t|z|\cos(Arg(z)-\frac{\pi}{2}-\delta')}\,\|(-te^{-i\left(\frac{\pi}{2}+\delta'\right)}I - A)^{-1}\|\,\mathrm{d}t \\
&\leq \int_{-\infty}^{-\frac{1}{|z|}} e^{-t|z|\cos(Arg(z)-\frac{\pi}{2}-\delta')}\,\frac{M}{-t}\,\mathrm{d}t \\
&\leq \int_{1}^{+\infty} e^{-u\sin(\varepsilon)}\,\frac{M}{u}\,\mathrm{d}u.
\end{aligned}$$

La dernière inégalité venant d'après (4.3), de la majoration

$$\cos(Arg(z)-\frac{\pi}{2}-\delta+\epsilon) \leq \cos(-\frac{\pi}{2}-\epsilon) = -\sin(\epsilon) < 0$$

et du changement de variable $u = -|z|t$.
L'intégrale suivant Γ_z^1 est donc bien définie.
En utilisant l'encadrement (4.3) que l'on peut appliquer à $\overline{z}$, on obtient $\cos(Arg(z)+\frac{\pi}{2}+\delta-\epsilon) \leq \cos(\frac{\pi}{2}+\epsilon) = -\sin(\epsilon) < 0$ et par des majorations similaires,

$$\begin{aligned}
\left\|\int_{\Gamma_z^3} e^{\mu z}(\mu I - A)^{-1}\,\mathrm{d}\mu\right\| &\leq \int_{\frac{1}{|z|}}^{+\infty} e^{t|z|\cos(Arg(z)+\frac{\pi}{2}+\delta')}\,\frac{M}{t}\,\mathrm{d}t \\
&\leq \int_{1}^{+\infty} e^{-u\sin(\varepsilon)}\,\frac{M}{u}\,\mathrm{d}u.
\end{aligned}$$

Pour l'intégrale suivant Γ_z^2, on obtient

$$\begin{aligned}
\left\|\int_{\Gamma_z^2} e^{\mu z}(\mu I - A)^{-1}\,\mathrm{d}\mu\right\| &\leq \int_{-\frac{\pi}{2}-\delta'}^{\frac{\pi}{2}+\delta'} e^{\cos(Arg(z)+\theta)}\,\left\|\left(\frac{1}{|z|}e^{i\theta}I - A\right)^{-1}\right\|\frac{1}{|z|}\,\mathrm{d}\theta \\
&\leq \int_{-\frac{\pi}{2}-\delta'}^{\frac{\pi}{2}+\delta'} Me^{\cos(Arg(z)+\theta)}\,\mathrm{d}\theta \\
&\leq 2\pi Me.
\end{aligned}$$

L'opérateur T est donc bien défini sur Σ_δ pour les chemins Γ_z.
Et on a même mieux. Si on fixe d'abord un $\delta' \in]0,\delta[$, qu'on prend $\varepsilon = \frac{\delta-\delta'}{2}$, alors on a $\forall z \in \Sigma_{\delta'}$, $\varepsilon \in \left]0, \frac{\delta-|Arg(z)|}{2}\right[$ et donc on obtient les majorations effectuées précédemment, puis

$$\|T(z)\| \leq \frac{M}{\pi}\int_1^{+\infty}\frac{e^{-u\sin(\varepsilon)}}{u}\,\mathrm{d}u + Me.$$

Ceci montre donc que $\forall \delta' < \delta$, T est borné sur $\Sigma_{\delta'}$.

Il reste à voir que T ne dépend pas de Γ_z.
Soient $z \in \Sigma_\delta$ et γ_z vérifiant la condition (4.2). On va montrer que l'intégrale suivant Γ_z est

égale à l'intégrale suivant γ_z. Pour cela on va d'abord se restreindre aux lacets définis par Γ_z, γ_z et des cercles de rayon $R>0$. Plus précisément, considérons les ensembles suivants pour $R>0$

$$D_R=\{t\in\mathbb{R},\ |\Gamma_z(t)|\leq R\}\ \text{ et }\ D'_R=\{t\in\mathbb{R},\ |\gamma_z(t)|\leq R\}.$$

Pour R assez grand, D_R et D'_R sont des intervalles de $\mathbb{R}$.
Soient $t_0=\min D_R$, $t_1=\min D'_R$, $t_2=\max D_R$ et $t_3=\max D'_R$.
On définit maintenant le lacet $\Lambda_R=\gamma_z|_{D'_R}\,.\,\partial D_R|_{(*)}\,.\,\check{\Gamma}_z\Big|_{D_R}\,.\,\partial D_R|_{(**)}$ avec
$(*)=[Arg(\gamma_z(t_3)),Arg(\Gamma_z(t_2))]$, $(**)=[Arg(\Gamma_z(t_0)),Arg(\Gamma_z(t_1))]$ et D_R le cercle de rayon R orienté convenablement.

Λ_R est un lacet à image dans Σ_δ et $\mu\mapsto e^{\mu z}(\mu I-A)^{-1}$ est holomorphe sur Σ_δ donc, par le théorème de Cauchy, $\int_{\Lambda_R}e^{\mu z}(\mu I-A)^{-1}\,\mathrm{d}\mu=0$.
De plus,

$$\left\|\int_{\partial D_R|_{(*)}}e^{\mu z}(\mu I-A)^{-1}\,\mathrm{d}\mu\right\|\leq\left|\int_{Arg(\gamma_z(t_3))}^{Arg(\Gamma_z(t_2))}Me^{R|z|\cos(\theta+Arg(z))}\,\mathrm{d}\theta\right|.$$

Or comme $\Gamma_z(t)\underset{\infty}{\sim}|t|e^{i\frac{t}{|t|}(\frac{\pi}{2}+\delta')}\underset{\infty}{\sim}\gamma_z(t)$ on a $\lim\limits_{R\to\infty}Arg(\gamma_z(t_3))-\frac{\pi}{2}-\delta'=\lim\limits_{R\to\infty}Arg(\Gamma_z(t_2))-\frac{\pi}{2}-\delta'=0$.
Ainsi pour R assez grand le cosinus devient strictement négatif d'après les majorations effectuées précédemment.
Les intégrales suivant les sections de cercles tendent vers 0 et par passage à la limite on obtient finalement

$$\int_{\gamma_z}e^{\mu z}(\mu I-A)^{-1}\,\mathrm{d}\mu=\int_{\Gamma_z}e^{\mu z}(\mu I-A)^{-1}\,\mathrm{d}\mu,$$

ceci pour tout chemin γ_z vérifiant (4.2). T est bien indépendant du chemin choisi.

Montrons que T est un semi-groupe holomorphe d'angle δ.
(i) Soient $z_1,\ z_2\in\Sigma_\delta$, montrons que $T(z_1)T(z_2)=T(z_1+z_2)$.
Pour cela, considérons $\delta'\in\,]\max(Arg(z_1),Arg(z_2)),\delta[$ et $\gamma=\Gamma_{z_1}$ défini plus haut et $\gamma'=\gamma+\frac{2}{|z_1|}+1$. On a donc

$$\begin{aligned}T(z_1)T(z_2)&=\frac{1}{(2i\pi)^2}\int_\gamma\int_{\gamma'}e^{\mu z_1}e^{\lambda z_2}(\mu I-A)^{-1}(\lambda I-A)^{-1}d\lambda\,\mathrm{d}\mu\\&=\frac{1}{(2i\pi)^2}\int_\gamma\int_{\gamma'}\frac{e^{\mu z_1}e^{\lambda z_2}}{\lambda-\mu}\Big((\mu I-A)^{-1}-(\lambda I-A)^{-1}\Big)\,d\lambda\,\mathrm{d}\mu\\&=\frac{1}{2i\pi}\int_\gamma e^{\mu z_1}(\mu I-A)^{-1}\left(\frac{1}{2i\pi}\int_{\gamma'}\frac{e^{\lambda z_2}}{\lambda-\mu}\mathrm{d}\lambda\right)\,\mathrm{d}\mu\\&\quad-\frac{1}{2i\pi}\int_{\gamma'}e^{\lambda z_2}(\lambda I-A)^{-1}\left(\frac{1}{2i\pi}\int_\gamma\frac{e^{\mu z_1}}{\lambda-\mu}\,\mathrm{d}\mu\right)\,\mathrm{d}\lambda.\end{aligned}$$

La deuxième égalité vient de l'équation de la résolvante et du fait que $\gamma(\mathbb{R})\cap\gamma'(\mathbb{R})=\varnothing$. La troisième égalité utilise le théorème de Fubini.
De plus on obtient, par le théorème de Cauchy et en fermant les chemins (à gauche) par des cercles de rayon tendant vers ∞, les deux égalités suivantes

$$\frac{1}{2i\pi}\int_{\gamma'}\frac{e^{\lambda z_2}}{\lambda-\mu}\,\mathrm{d}\lambda=e^{\mu z_2}\ \text{ et }\ \frac{1}{2i\pi}\int_\gamma\frac{e^{\mu z_1}}{\lambda-\mu}\,\mathrm{d}\mu=0.$$

En effet, ceci vient du fait que les intégrales suivant les sections de cercles tendent vers 0 quand le rayon tend vers ∞. Par exemple pour la seconde on a pour R assez grand et $\varepsilon = \delta - \delta'$

$$\begin{aligned}
\left| \int_{\frac{\pi}{2}+\delta'}^{\frac{3\pi}{2}-\delta'} \frac{e^{\mathrm{Re}^{i\theta} z_1}}{\lambda - \mathrm{Re}^{i\theta}} Rie^{i\theta} \, \mathrm{d}\theta \right| &\leq \int_{\frac{\pi}{2}+\delta'}^{\frac{3\pi}{2}-\delta'} \frac{e^{R|z_1|\cos(\theta + Arg(z_1))}}{\left| \frac{\lambda}{R} - e^{i\theta} \right|} \, \mathrm{d}\theta \\
&\leq \int_{\frac{\pi}{2}+\delta'}^{\frac{3\pi}{2}-\delta'} \frac{e^{-R|z_1|\sin(\varepsilon)}}{1 - \frac{|\lambda|}{R}} \, \mathrm{d}\theta \\
&\underset{R\to\infty}{\longrightarrow} 0.
\end{aligned}$$

Ceci car $\frac{\pi}{2} + \varepsilon \leq \frac{\pi}{2} + \delta' + Arg(z_1) \leq \theta + Arg(z_1) \leq 2\pi - \frac{\pi}{2} - \delta' + Arg(z_1) \leq \frac{3\pi}{2} - \varepsilon$.
Ainsi,

$$\begin{aligned}
T(z_1)T(z_2) &= \frac{1}{2i\pi} \int_\gamma e^{\mu(z_1+z_2)} (\mu I - A)^{-1} \, \mathrm{d}\mu \\
&= T(z_1 + z_2).
\end{aligned}$$

(ii) Pour tout $\delta' \in]0, \delta[$, T est holomorphe sur $\Sigma_{\delta'}$, d'une part car $\mu \mapsto e^{\mu z}(\mu I - A)^{-1}$ est holomorphe et d'autre part d'après les majorations uniformes effectuées plus haut par des fonctions intégrables. T est donc holomorphe sur Σ_δ.

(iii) Soit $\delta' \in]0, \delta[$. Montrons que $\forall x \in X, \ \lim\limits_{\substack{z\to 0 \\ z\in\Sigma_{\delta'}}} T(z)x = x$.
En utilisant comme précédemment le théorème de Cauchy et en fermant par des cercles dont le rayon tend vers l'infini on obtient pour γ vérifiant (4.2) (par exemple Γ_1) et pour tout $z \in \Sigma_{\delta'}$

$$\frac{1}{2i\pi} \int_\gamma \frac{e^{\mu z}}{\mu} \, \mathrm{d}\mu = 1.$$

De plus on a aussi que $\forall x \in D(A)$, $(\mu I - A)^{-1}Ax = \mu(\mu I - A)^{-1}x - x$. Ainsi,

$$\begin{aligned}
T(z)x - x &= \frac{1}{2i\pi} \int_\gamma e^{\mu z} \left((\mu I - A)^{-1} - \frac{1}{\mu} \right) x \, \mathrm{d}\mu \\
&= \frac{1}{2i\pi} \int_\gamma \frac{e^{\mu z}}{\mu} (\mu I - A)^{-1} Ax \, \mathrm{d}\mu \\
&\underset{\substack{z\to 0 \\ z\in\Sigma_{\delta'}}}{\longrightarrow} \frac{1}{2i\pi} \int_\gamma \frac{1}{\mu} (\mu I - A)^{-1} \ Ax \, \mathrm{d}\mu.
\end{aligned}$$

Pour le passage à la limite de la dernière ligne, on utilise le théorème de convergence dominée de Lebesgue grâce aux majorations déjà obtenues précédemment et parce qu'on peut prendre $|z| < 1$. De plus $\mu \mapsto (\mu I - A)^{-1}Ax$ est holomorphe sur $\Sigma_{\delta'}$ donc par le théorème de Cauchy on obtient, pour $R > 0$,

$$\int_{\gamma_R} \frac{1}{\mu} (\mu I - A)^{-1} Ax \, \mathrm{d}\mu = 0$$

avec γ_R le lacet défini comme γ fermé à droite par un cercle de rayon R et car 0 est à l'extérieur de γ_R. Or

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\frac{\pi}{2}-\delta'}^{\frac{\pi}{2}+\delta'} \left\| \frac{i\mathrm{Re}^{i\theta}}{\mathrm{Re}^{i\theta}} (\mathrm{Re}^{i\theta} I - A)^{-1} Ax \right\| \, \mathrm{d}\theta \leq \frac{M\|Ax\|}{R} \underset{R\to\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Donc

$$\lim_{\substack{z\to 0 \\ z\in\Sigma_{\delta'}}} T(z)x - x = \frac{1}{2i\pi} \int_\gamma \frac{1}{\mu} (\mu I - A)^{-1} Ax \, \mathrm{d}\mu = 0.$$

Ceci est valable pour tout $x \in D(A)$. On obtient finalement le résultat souhaité par densité de $D(A)$ dans X.

On a montré jusqu'à présent que T était un semi-groupe holomorphe borné d'angle δ. Il faut maintenant montrer que A est effectivement son générateur infinitésimal.
Soit B le générateur infinitésimal du semi-groupe $T|_{\mathbb{R}^+}$. $T|_{\mathbb{R}^+}$ est un C^0-semi-groupe borné donc grâce au théorème de Hille-Yosida on a que $\mathbb{R}_+^* \subset D(B)$. Ainsi $2 \in D(B) \cup D(A)$ car A est δ-sectoriel. Donc pour montrer que $(A, D(A)) = (B, D(B))$, il suffit de montrer que $(2I - A)^{-1} = (2I - B)^{-1}$.
D'après le lemme 3.1.1 on a que la résolvante est égale à la transformée de Laplace de T en 2 car elle existe. On obtient donc pour $\gamma = \Gamma_1$ appliqué à $\delta' = \frac{\delta}{2}$

$$\begin{aligned}(2I - B)^{-1} &= \lim_{R\to\infty} \int_0^R e^{-2t} T(t)\ \mathrm{d}t \\ &= \lim_{R\to\infty} \frac{1}{2i\pi} \int_\gamma \int_0^R e^{t(\mu-2)} (\mu I - A)^{-1}\ dt\ \mathrm{d}\mu \\ &= \lim_{R\to\infty} \frac{1}{2i\pi} \int_\gamma \frac{e^{R(\mu-2)} - 1}{\mu - 2} (\mu I - A)^{-1}\ \mathrm{d}\mu.\end{aligned}$$

Or, par le théorème de Cauchy appliqué à γ fermé à droite (donc le lacet est orienté négativement) par des cercles de rayon tendant vers l'infini, on obtient

$$\frac{1}{2i\pi} \int_\gamma \frac{1}{\mu - 2} (\mu I - A)^{-1}\ \mathrm{d}\mu = -(2I - A)^{-1}.$$

De plus, on a $\mathrm{Re}(\mu - 2) \leq -1$ et A est sectoriel donc il existe M' tel que

$$\left\| \int_\gamma \frac{e^{R(\mu-2)}}{\mu - 2} (\mu I - A)^{-1}\ \mathrm{d}\mu \right\| \leq e^{-R} \int_\gamma \frac{M'}{|\mu - 2||\mu|}\ |\mathrm{d}\mu|.$$

L'intégrale de gauche existe bien car équivalent à $\frac{1}{t^2}$ en ∞. De plus, le terme de gauche tend vers 0 quand R tend vers $+\infty$.
Ainsi on obtient le résultat souhaité, à savoir $(2I - A)^{-1} = (2I - B)^{-1}$ puis que A est bien le générateur infinitésimal de T.

On vient donc de montrer la première implication en construisant un semi-groupe holomorphe borné T de générateur infinitésimal l'opérateur δ-sectoriel A.
Réciproquement, soit T un semi-groupe holomorphe borné d'angle δ de générateur infinitésimal A. Montrons que A est δ-sectoriel.

Tout d'abord on peut remarquer que pour tout $\theta \in]-\delta, \delta[$, $T_\theta : t \mapsto T(te^{i\theta})$ est un C^0-semi-groupe borné. On a que $A_{T_\theta} = e^{i\theta} A_T$ d'après le lemme ci-dessous.
De plus, comme T_θ étant un C^0-semi-groupe borné on obtient par le théorème de Hille-Yosida que $\Sigma_{\frac{\pi}{2}} \subset \rho(A_{T_\theta})$ et donc que pour tout $\theta \in]-\delta, \delta[$,

$$\{ze^{-i\theta}, \mathrm{Re} z > 0\} \subset \rho(A_T).$$

Ainsi $\Sigma_{\frac{\pi}{2}+\delta} \subset \rho(A_T)$.
Soit maintenant $\delta' \in]0, \delta[$. Posons $\varepsilon = \frac{\delta - \delta'}{2}$. Toujours d'après le théorème de Hille-Yosida appliqué à $T_{-(\delta'+\varepsilon)}$, il existe $M \geq 0$ tel que pour tout $z \in \mathbb{C}^*$ vérifiant $Arg(z) \in \left[-\frac{\pi}{2} + \delta' + 2\varepsilon, \frac{\pi}{2} + \delta'\right]$,

$$\|(zI - A_T)^{-1}\| \leq \frac{M}{\mathrm{Re}(ze^{-i(\delta'+\varepsilon)})} \leq \frac{M'}{|z|}.$$

Ceci car on a $\cos(Arg(z) - \delta' - \varepsilon) \geq \cos(\epsilon) > 0$. De même, il existe $K \geq 0$ tel que

$$\forall z \in \mathbb{C}^* \text{ vérifiant } Arg(z) \in \left[-\frac{\pi}{2} - \delta', \frac{\pi}{2} - \delta' - 2\varepsilon\right],\ \|(zI - A_T)^{-1}\| \leq \frac{K}{\mathrm{Re}(ze^{i(\delta'+\varepsilon)})} \leq \frac{K'}{|z|}.$$

De plus, comme $-\frac{\pi}{2} + \delta' + 2\varepsilon \leq \frac{\pi}{2} - \delta' - 2\varepsilon$, on a

$$\forall z \in \overline{\Sigma_{\frac{\pi}{2}+\delta'}} \setminus \{0\},\ \|(zI - A_T)^{-1}\| \leq \frac{M' + K'}{|z|}.$$

Ainsi A est δ-sectoriel, ce qui conclut la preuve. □

Lemme 4.1.5 *Soit T un semi-groupe holomorphe d'angle δ.*
Pour tout $\theta \in\,]-\delta, \delta[$, soit le C^0-semi-groupe $T_\theta : t \mapsto T(te^{i\theta})$. Alors $A_{T_\theta} = e^{i\theta} A_T$.

Démonstration :
Soit $\lambda > 0$ tel qu'il existe $M > 0$ tel que pour tout $z \in \Sigma_{\theta+\varepsilon}$, $\|T(z)\| \leq Me^{\lambda\frac{\cos(\theta)}{2}|z|}$, ce qui existe par « généralisation » du Théorème 2.3.2 ($\varepsilon \in\,]0, \delta - \theta[$). Comme précédemment, montrons qu'il y a égalité des résolvantes grâce à la transformée de Laplace qui existe.

$$\begin{aligned}(\lambda I - A_{T_\theta})^{-1} &= \int_0^\infty e^{-\lambda t} T_\theta(t)\ \mathrm{d}t \\ &= e^{-i\theta} \int_\gamma e^{-\lambda r e^{-i\theta}} T(r)\ \mathrm{d}r.\end{aligned}$$

avec $\gamma : t \mapsto te^{i\theta}$ défini sur $\mathbb{R}^+$. De plus, toujours en utilisant le théorème de Cauchy et en fermant par des cercles, on a

$$\int_\gamma e^{-\lambda r e^{-i\theta}} T(r)\ dr = \int_0^\infty e^{-\lambda t e^{-i\theta}} T(t)\ \mathrm{d}t.$$

Ceci car d'une part l'intégrale de droite existe et d'autre part car on a

$$\begin{aligned}\left|\int_0^\theta \|e^{-\lambda \mathrm{Re}^{i(\omega-\theta)}} T(\mathrm{Re}^{i\omega})\| R\ \mathrm{d}\omega\right| &\leq \left|\int_0^\theta e^{-\lambda R\cos(\omega-\theta)} Me^{\lambda\frac{\cos(\theta)}{2}R} R\ \mathrm{d}\omega\right| \\ &\leq |\theta| MRe^{-R\lambda\frac{\cos(\theta)}{2}} \underset{R\to\infty}{\longrightarrow} 0.\end{aligned}$$

On obtient donc que $(\lambda I - A_{T_\theta})^{-1} = (\lambda I - e^{i\theta} A_T)^{-1}$ puis que $A_{T_\theta} = e^{i\theta} A_T$. □

Corollaire 4.1.6 *Si A est δ-sectoriel alors A génère un unique semi-groupe holomorphe borné d'angle δ. L'expression de ce semi-groupe est donné par* (4.1)*.*

Démonstration :
Il n'y a qu'à montrer l'unicité, l'existence venant du Théorème précèdent.
Supposons que A génère les semi-groupes holomorphes T et S. Par le Corollaire 2.3.7 on obtient que $T|_{\mathbb{R}^+} = S|_{\mathbb{R}^+}$. Comme T et S sont holomorphe on obtient par le principe des zéros isolés que $T = S$. □

Nous allons maintenant donner une condition suffisante sur l'image numérique d'un opérateur défini sur un espace de Hilbert pour qu'il génère un semi-groupe holomorphe.
L'image numérique d'un opérateur linéaire T sur un Hilbert H est définie par

$$W(T) = \{\langle x|Tx\rangle,\ x \in D(T),\ \|x\| = 1\}.$$

Théorème 4.1.7 *Soient H un espace de Hilbert et A un opérateur linéaire à domaine dense. Supposons qu'il existe $\delta \in]0, \frac{\pi}{2}[$ tel que $W(A) \subset \overline{\Sigma_\delta}$ et $W(A^\star) \subset \overline{\Sigma_\delta}$.*
Alors A est fermable et $-\overline{A}$ génère un semi-groupe holomorphe d'angle $\frac{\pi}{2} - \delta$.

Démonstration :
Soient $x \in H,\ x \neq 0,\ \frac{1}{\|x\|^2}\langle x|Ax\rangle \in W(A) \subset \overline{\Sigma_\delta}$ donc $\mathrm{Re}(\langle x|Ax\rangle) \geq 0$.
Soit $\lambda > 0$,
$$\|\lambda x - (-Ax)\|^2 = \lambda^2\|x\|^2 + \|Ax\|^2 + 2\mathrm{Re}\langle x|Ax\rangle \geq \lambda^2\|x\|^2.$$
L'opérateur $-A$ est donc dissipatif et comme $-A$ est à domaine dense, $-A$ est fermable puis A est fermable.
Soit $x \in D(\overline{A})$, il existe $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in D(A)^{\mathbb{N}}$ telle que $x_n \to x$ et $Ax_n \to \overline{A}x$.
Par continuité du produit scalaire, $\langle x|\overline{A}x\rangle \in \overline{\Sigma_\delta}$.
On a $D(\overline{A}^\star) = \{x \in H,\ \exists z \in H,\ \forall y \in D(\overline{A}), \langle \overline{A}y|x\rangle = \langle y|z\rangle\}$ donc $D(\overline{A}^\star) \subset D(A^\star)$.
De plus, pour tout $y \in D(A),\ \overline{A}y = Ay$ donc $A^\star$ est une extension de $\overline{A}^\star$ et on a $W(\overline{A}^\star) \subset \overline{\Sigma_\delta}$.
Soit $x \in D(\overline{A})$ vérifiant $\|x\| = 1$. On remarque tout d'abord que pour tout $\lambda \in \mathbb{C}$,
$$\begin{aligned} \|\lambda x - \overline{A}x\| &\geq |\langle \lambda x - \overline{A}x|x\rangle| \\ &\geq |\lambda - \langle \overline{A}x|x\rangle| \\ &\geq \mathrm{dist}(\lambda, \Sigma_\delta). \end{aligned}$$
Ainsi, pour tout $x \in H$ on a $\|\lambda x - \overline{A}x\| \geq \mathrm{dist}(\lambda, \Sigma_\delta)\|x\|$. Donc si $\lambda \notin \overline{\Sigma_\delta}$, on a que $\lambda I - \overline{A}$ est injectif et à image fermée. Montrons que $\mathrm{Im}(\lambda I - \overline{A}) = H$. Pour cela montrons que $\mathrm{Im}(\lambda I - \overline{A})$ est dense dans H ce qui revient à montrer qu'il est d'orthogonal nul. Or on a $\mathrm{Im}(\lambda I - \overline{A})^\perp = \mathrm{Ker}(\overline{\lambda} I - \overline{A}^\star)$. De plus, comme $\overline{A}^\star$ vérifie les mêmes propriétés que $\overline{A}$, on a $\overline{\lambda} I - \overline{A}^\star$ injectif car $\overline{\lambda} \notin \overline{\Sigma_\delta}$. Donc $\mathrm{Im}(\lambda I - \overline{A}) = H$ ce qui entraîne que $\lambda I - \overline{A}$ est bijectif pour tout $\lambda \notin \overline{\Sigma_\delta}$. De plus, pour tout $\lambda \notin \overline{\Sigma_\delta}$, $x \in X$, on a
$$\|(\lambda I - \overline{A})^{-1}x\| \leq \frac{1}{\mathrm{dist}(\lambda, \Sigma_\delta)}\|x\|.$$
L'opérateur $(\lambda I - \overline{A})$ est donc inversible. Soit $\theta \in]\delta, \pi[$. Si $\theta \in]\delta + \frac{\pi}{2}, \pi[$, alors pour tout $\lambda \notin \Sigma_\theta$ $\mathrm{dist}(\lambda, \Sigma_\delta) = |\lambda|$ donc $\sin(\theta - \delta) \leq \frac{\mathrm{dist}(\lambda,\Sigma_\delta)}{|\lambda|}$.
Supposons désormais que $\theta \in]\delta, \delta + \frac{\pi}{2}]$, comme sin est croissante sur $[0, \frac{\pi}{2}]$, pour $\lambda \notin \Sigma_\theta$ on a
$$\sin(\theta - \delta) \leq \frac{\mathrm{dist}(\lambda, \Sigma_\delta)}{|\lambda|}.$$
On a donc pour tout $x \in H$, $\theta \in]\delta, \pi[$, $\lambda \notin \Sigma_\theta$,
$$\|\lambda(\lambda I - \overline{A})^{-1}x\| \leq \frac{1}{\sin(\theta - \delta)}\|x\|.$$
Puis, pour tout $x \in H$, $\alpha \in [0, \frac{\pi}{2} - \delta]$, $\lambda \in \overline{\Sigma_{\frac{\pi}{2}+\alpha}} \setminus \{0\}$,
$$\|\lambda(\lambda I + \overline{A})^{-1}x\| \leq \frac{1}{\sin(\alpha + \delta)}\|x\|.$$
Comme on a aussi $\Sigma_{\frac{\pi}{2}+\alpha} \subset \rho(\overline{A})$, d'après le Théorème 4.1.4, $-\overline{A}$ génère un semi-groupe holomorphe d'angle $\frac{\pi}{2} - \delta$. □

Nous avons vu dans le Corollaire 2.3.6 que le problème de Cauchy (DE) admettait une solution unique pour toute condition initiale $y(0) \in D(A)$. Pour les générateurs infinitésimaux de semi-groupes holomorphes bornés on a le résultat plus général suivant.

Corollaire 4.1.8 *Si A est le générateur infinitésimal d'un semi-groupe holomorphe borné T alors pour tout $x \in X$ le problème de Cauchy*

$$\begin{cases} u(0) = x \\ u'(t) = Au(t), \quad \forall t > 0. \end{cases} \tag{DE*}$$

admet une unique solution à savoir $t \mapsto T(t)x$.

Démonstration :
Soit T un semi-groupe holomorphe d'angle $\delta \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right]$ quelconque de générateur infinitésimal A. D'après le Corollaire 4.1.6 pour tout $z \in \Sigma_\delta$,

$$T(z) = \frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma_z} e^{\mu z} (\mu I - A)^{-1} \, \mathrm{d}\mu$$

avec γ_z vérifiant (4.2).
D'une part on obtient grâce au théorème de convergence dominé que pour tout $t > 0$,

$$T'(t) = \frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma_z} \mu e^{\mu t} (\mu I - A)^{-1} \, \mathrm{d}\mu.$$

D'autre part, on a que pour tout $t > 0$ et $x \in X$, $T(t)x \in D(A)$ car T, étant holomorphe sur Σ_δ, est dérivable en t. De plus, on a

$$\begin{aligned} AT(t) &= \frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma_z} e^{\mu z} A(\mu I - A)^{-1} \, \mathrm{d}\mu \\ &= \frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma_z} e^{\mu z} (\mu(\mu I - A)^{-1} - I) \, \mathrm{d}\mu \\ &= \frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma_z} e^{\mu z} \mu(\mu I - A)^{-1} \, \mathrm{d}\mu, \end{aligned}$$

la dernière égalité venant du fait que $\int_{\gamma_z} e^{\mu z} \, \mathrm{d}\mu = 0$ par le théorème de Cauchy.
Ainsi pour tout $x \in X$, on obtient que $t \mapsto T(t)x$ vérifie le problème de Cauchy (DE*).

L'unicité de la solution s'obtient comme dans le Corollaire 2.3.6 en utilisant la dérivabilité des solutions sur $\mathbb{R}_+^*$ et leur continuité sur $\mathbb{R}^+$. $\square$

Chapitre 5

Équation de la chaleur

5.1 Définition de l'équation

Nous allons maintenant étudier un exemple d'équation « d'évolution » : l'équation de la chaleur. Plaçons nous ici dans le cas où H est l'espace de Hilbert $L^2(\mathbb{R}^n)$ des fonctions de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{C}$ de module de carré intégrable avec $n \in \mathbb{N}^*$.
On définit les espaces de Sobolev :

$$W^{1,2}(\mathbb{R}^n) = \left\{ u \in H,\ \forall i \in [\![1,n]\!],\ \frac{\partial u}{\partial x_i} \in H \right\} \text{ et}$$

$$W^{2,2}(\mathbb{R}^n) = \left\{ u \in H,\ \forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2,\ \frac{\partial u}{\partial x_i} \in H \text{ et } \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} \in H \right\}.$$

Il faut noter qu'ici les dérivées sont au sens des distributions car toute fonction de $L^2(\mathbb{R}^n)$ n'est pas différentiable. Dans cette partie l'application $(x,y) \mapsto x.y$ désignera le produit scalaire hermitien de $\mathbb{C}^n$.

Définition 5.1.1 *(Laplacien)*
L'opérateur laplacien Δ est défini sur $D(\Delta) = W^{2,2}(\mathbb{R}^n)$ par

$$\Delta f = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial {x_k}^2}$$

pour tout $f \in D(\Delta)$.

Définition 5.1.2 *(Équation de la chaleur)*
L'équation de la chaleur est définie par

$$\begin{cases} u(0) = f \\ \frac{\partial u}{\partial t}(t) = \Delta u(t) \quad \forall t > 0 \end{cases} \tag{EC}$$

avec $u : \mathbb{R}^+ \longrightarrow H$ et $f \in H$.

Le but de cette section est de montrer que cette équation admet une unique solution pour toute condition initiale. Pour cela nous allons utiliser les outils de la théorie des semi-groupes étudiés précédemment. Pour cela il nous faut d'abord obtenir quelques propriétés sur l'opérateur laplacien.

5.2 Propriétés du Laplacien et des espaces de Sobolev

Définition 5.2.1 *(Opérateur gradient) L'opérateur gradient* ∇ *est défini sur* $W^{2,2}(\mathbb{R}^n)$ *par*

$$\nabla f = \left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right)_{i \in [\![1,n]\!]}.$$

Proposition 5.2.2 $W^{1,2}(\mathbb{R}^n)$ *muni du produit scalaire* $\langle .|. \rangle_{W^{1,2}(\mathbb{R}^n)}$ *défini ci-dessous est un espace de Hilbert.*

$$\langle u|v \rangle_{W^{1,2}(\mathbb{R}^n)} = \langle u|v \rangle_H + \sum_{i=1}^{N} \left\langle \frac{\partial u}{\partial x_i} \middle| \frac{\partial v}{\partial x_i} \right\rangle_H.$$

Démonstration :
Soit $(u_m)_{m\in\mathbb{N}}$ une suite de Cauchy de $W^{1,2}(\mathbb{R}^n)$ muni de la norme $\|.\|_{W^{1,2}(\mathbb{R}^n)}$ associée au produit scalaire $\langle .|. \rangle_{W^{1,2}(\mathbb{R}^n)}$.
Par définition de cette norme on a $(u_m)_{m\in\mathbb{N}}$ de Cauchy dans H et pour tout i dans $[\![1,n]\!]$, on a $(\frac{\partial u_m}{\partial x_i})_{m\in\mathbb{N}}$ de Cauchy dans H.
H est un espace de Hilbert donc il existe n+1 fonctions $(v_i)_{i\in[\![0,n]\!]}$ dans H telles que $(u_m)_{m\in\mathbb{N}}$ tende vers v_0 et, pour tout $i \in [\![1,n]\!]$, $(\frac{\partial u_m}{\partial x_i})_{m\in\mathbb{N}}$ tende vers v_i dans H. Soient $i \in [\![1,n]\!]$, $f \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ et $m \in \mathbb{N}$, on a

$$\int_{\mathbb{R}^n} u_m \frac{\partial f}{\partial x_i} = -\int_{\mathbb{R}^n} \frac{\partial u_m}{\partial x_i} f.$$

En passant à la limite on a

$$\int_{\mathbb{R}^n} v_0 \frac{\partial f}{\partial x_i} = -\int_{\mathbb{R}^n} v_i f.$$

Finalement, pour tout $i \in [\![1,n]\!]$, on a $\frac{\partial v_0}{\partial x_i} = v_i$ au sens des distributions. Ainsi $v_0 \in W^{1,2}(\mathbb{R}^n)$. De plus $(u_m)_{m\in\mathbb{N}}$ converge vers v_0 pour $\|.\|_{W^{1,2}(\mathbb{R}^n)}$. On a donc que $W^{1,2}(\mathbb{R}^n)$ est un espace de Hilbert. □

Proposition 5.2.3 $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ *est dense dans* $W^{1,2}(\mathbb{R}^n)$ *muni de la norme* $\|.\|_{W^{1,2}(\mathbb{R}^n)}$.

Démonstration :
Soit $u \in W^{1,2}(\mathbb{R}^n)$, on définit la suite $(u_m)_{m\in\mathbb{N}}$ par $u_m = \zeta_m(\rho_m * u)$ avec
- $(\rho_m)_{m\in\mathbb{N}}$ une suite de $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ telle que $\text{supp}(\rho_m) \subset \overline{B(0,\frac{1}{m})}$, $\int_{\mathbb{R}^m} \rho_m = 1$ et $\rho_m \geq 0$ sur $\mathbb{R}^n$;
- $\zeta_m : x \mapsto \zeta(\frac{x}{m})$ avec ζ une fonction dans $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ qui vaut 1 sur $[-1,1]$ et 0 en dehors de $[-2,2]$.
Soit $m \in N$, $u_m \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ car $\zeta_m \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ et $\rho_m * u \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$.
Soit $i \in [\![1,n]\!]$,

$$\frac{\partial u_m}{\partial x_i} = \frac{\partial \zeta_m}{\partial x_i}(\rho_m * u) + \zeta_m \frac{\partial \rho_m * u}{\partial x_i}.$$

Soit $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$, $i \in [\![1, n]\!]$,

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^n} (\rho_m * u) \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} &= \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} \rho_m(x-y) u(y) \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}(x)\ \mathrm{d}y\,\mathrm{d}x \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} u(y) \int_{\mathbb{R}^n} \rho_m(x-y) \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}(x)\ \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} u \left(\check{\rho}_m * \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \right) \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} u \frac{\partial \check{\rho}_m * \varphi}{\partial x_i} \\
&= -\int_{\mathbb{R}^n} \frac{\partial u}{\partial x_i} (\check{\rho}_m * \varphi) \\
&= -\int_{\mathbb{R}^n} \left(\rho_m * \frac{\partial u}{\partial x_i} \right) \varphi.
\end{aligned}$$

On a donc $\frac{\partial \rho_m * u}{\partial x_i} = \rho_m * \frac{\partial u}{\partial x_i}$ et comme $\|\zeta_m\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} \leq 1$,

$$\|u - u_m\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} \leq \|(\rho_m * u) - u\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} + \|\zeta_m u - u\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}.$$

La suite $(u_m)_{m \in \mathbb{N}}$ tend bien vers u dans $L^2(\mathbb{R}^n)$. De plus,

$$\begin{aligned}
\left\| \frac{\partial u}{\partial x_i} - \frac{\partial u_m}{\partial x_i} \right\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} &\leq \left\| \frac{\partial \zeta_m}{\partial x_i} (\rho_m * u) \right\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} + \left\| \zeta_m \left(\rho_m * \frac{\partial u}{\partial x_i} \right) - \frac{\partial u}{\partial x_i} \right\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} \\
&\leq \frac{1}{m} \left\| \frac{\partial \zeta}{\partial x_i} \right\|_\infty \|u\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} + \left\| \zeta_m \left(\rho_m * \frac{\partial u}{\partial x_i} \right) - \frac{\partial u}{\partial x_i} \right\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}.
\end{aligned}$$

Ceci permet donc de conclure. □

Proposition 5.2.4 *Pour tout $f \in H$, il existe une unique application $g \in W^{1,2}(\mathbb{R}^n)$ telle que pour tout $h \in W^{1,2}(\mathbb{R}^n)$,*

$$\int_{\mathbb{R}^n} \nabla h . \nabla g + \int_{\mathbb{R}^n} h \overline{g} = \int_{\mathbb{R}^n} h \overline{f}.$$

Démonstration :
On remarque d'abord que pour tout g et h dans $W^{1,2}(\mathbb{R}^n)$,

$$\langle h | g \rangle_{W^{1,2}(\mathbb{R}^n)} = \int_{\mathbb{R}^n} \nabla h . \nabla g + \int_{\mathbb{R}^n} h \overline{g}.$$

De plus, l'application définie sur $W^{1,2}(\mathbb{R}^n)$ par $h \mapsto \int_{\mathbb{R}^n} h\overline{f}$ est une forme linéaire continue donc, par le Théorème de représentation de Riesz, il existe un unique $g \in W^{1,2}(\mathbb{R}^n)$ tel que

$$\int_{\mathbb{R}^n} h \overline{f} = \langle h | g \rangle_{W^{1,2}(\mathbb{R}^n)} = \int_{\mathbb{R}^n} \nabla h . \nabla g + \int_{\mathbb{R}^n} h \overline{g}.$$

□

Pour tout $h \in \mathbb{R}^n$ et toute application u définie sur $\mathbb{R}^n$, $\tau_h u = u(\cdot + h)$.

Lemme 5.2.5 *Soit $u \in L^2(\mathbb{R}^n)$. Les assertions suivantes sont équivalentes.*

(i) $u \in W^{1,2}(\mathbb{R}^n)$ *;*

(ii) il existe C tel que pour tout $h \in \mathbb{R}^n$ on ait

$$\|\tau_h u - u\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} \leq C\|h\| \ ;$$

(iii) il existe C tel que pour tout $\phi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$, $i \in [\![1,n]\!]$ on ait

$$\left|\int_{\mathbb{R}^n} u\frac{\partial \phi}{\partial x_i}\right| \leq C\|\phi\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}.$$

De plus, $C = \|(\nabla u.\nabla u)^{\frac{1}{2}}\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}$ convient dans (ii) et (iii).

Démonstration :

$(i) \implies (ii)$

Soient $u \in W^{1,2}(\mathbb{R}^n)$, A borné dans $\mathbb{R}^n$ et $(x,h) \in (\mathbb{R}^n)^2$.

Si on définit v par $v : t \mapsto u(x+th)$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$, alors $v'(t) = h.\nabla u(x+th)$ et on a donc

$$u(x+h) - u(x) = v(1) - v(0) = \int_0^1 v'(t)\ \mathrm{d}t = \int_0^1 h.\nabla u(x+th)\ \mathrm{d}t.$$

Ainsi,

$$\begin{array}{rcl}
|\tau_h u(x) - u(x)| & \leq & \left|\displaystyle\int_0^1 h.\nabla u(x+th)\ \mathrm{d}t\right| \\
& \leq & \displaystyle\sum_{i=1}^n \left|\int_0^1 h_i \frac{\partial u}{\partial x_i}(x+th)\ \mathrm{d}t\right| \\
& \leq & \displaystyle\sum_{i=1}^n |h_i| \left(\int_0^1 \left|\frac{\partial u}{\partial x_i}(x+th)\right|^2\right)^{\frac{1}{2}} \\
& \leq & \|h\|_{\mathbb{R}^n} \left(\displaystyle\sum_{i=1}^n \int_0^1 \left|\frac{\partial u}{\partial x_i}(x+th)\right|^2\right)^{\frac{1}{2}} \\
& \leq & \|h\|_{\mathbb{R}^n} \left(\displaystyle\int_0^1 \nabla u(x+th).\nabla u(x+th)\ \mathrm{d}t\right)^{\frac{1}{2}}.
\end{array}$$

De plus,

$$|\tau_h u(x) - u(x)|^2 \leq \|h\|_{\mathbb{R}^n}^2 \int_0^1 \nabla u(x+th).\nabla u(x+th)\ \mathrm{d}t.$$

Donc on a

$$\begin{array}{rcl}
\displaystyle\int_A |\tau_h u(x) - u(x)|^2\ \mathrm{d}x & \leq & \|h\|_{\mathbb{R}^n}^2 \displaystyle\int_A \int_0^1 \nabla u(x+th).\nabla u(x+th)\ \mathrm{d}t\,\mathrm{d}x \\
& \leq & \|h\|_{\mathbb{R}^n}^2 \displaystyle\int_0^1 \int_A \nabla u(x+th).\nabla u(x+th)\ \mathrm{d}x\,\mathrm{d}t \\
& \leq & \|h\|_{\mathbb{R}^n}^2 \displaystyle\int_0^1 \int_{A+th} \nabla u(x).\nabla u(x)\ \mathrm{d}x\,\mathrm{d}t.
\end{array}$$

Et enfin, $\|\tau_h u(x) - u(x)\|_{L^2(A)} \leq \|h\|_{\mathbb{R}^n} \|(\nabla u.\nabla u)^{\frac{1}{2}}\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}$.

Ceci étant vrai pour tout A borné dans $\mathbb{R}^n$, on a

$$\|\tau_h u(x) - u(x)\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} \leq \|h\|_{\mathbb{R}^n} \|(\nabla u.\nabla u)^{\frac{1}{2}}\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}.$$

$(ii) \implies (iii)$

Soient $\phi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$, $h \in \mathbb{R}^n$, il existe C tel que

$$\left\|\int_{\mathbb{R}^n} (u(x+h) - u(x))\phi(x)\ \mathrm{d}x\right\| \leq C\|h\|_{\mathbb{R}^n} \|\phi\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}.$$

Mais on a

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^n}(u(x+h)-u(x))\phi(x)\ \mathrm{d}x &= \int_{\mathbb{R}^n}u(x+h)\phi(x)\ \mathrm{d}x-\int_{\mathbb{R}^n}u(x)\phi(x)\ \mathrm{d}x \\ &= \int_{\mathbb{R}^n}u(x)(\phi(x-h)-\phi(x))\ \mathrm{d}x\end{aligned}$$

Puis pour tout $i\in[\![1,n]\!]$, $t>0$,

$$\int_{\mathbb{R}^n}u(x)\frac{\phi(x+tei)-\phi(x)}{t}\ \mathrm{d}x\leq C\|\phi\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}.$$

On obtient (iii) en passant à la limite quand t tend vers 0.

$(iii)\implies(i)$
Soient $i\in[\![1,n]\!]$ et $F:\phi\mapsto\int_{\mathbb{R}^n}u\frac{\partial\phi}{\partial x_i}$ définie sur $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$. F se prolonge en une forme linéaire G sur $L^2(\mathbb{R}^n)$. Ainsi, par le théorème de représentation de Riesz, il existe $g\in L^2(\mathbb{R}^n)$ telle que pour tout $\phi\in L^2(\mathbb{R}^n)$,

$$G(\phi)=\int_{\mathbb{R}^n}g\phi.$$

Cela est vrai en particulier sur $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ et u appartient donc à $W^{1,2}(\mathbb{R}^n)$. □

Théorème 5.2.6 *Soient $f\in H$ et $u\in W^{1,2}(\mathbb{R}^n)$ telles que pour tout $\varphi\in W^{1,2}(\mathbb{R}^n)$,*

$$\int_{\mathbb{R}^n}\nabla\varphi.\nabla u+\int_{\mathbb{R}^n}\overline{u}\varphi=\int_{\mathbb{R}^n}\overline{f}\varphi.$$

On a alors $u\in W^{2,2}(\mathbb{R}^n)$.

Démonstration :
Soit $h\in\mathbb{R}^n$, $h\neq0$. Notons $D_hu=\frac{1}{\|h\|}(\tau_hu-u)$. Soit $g=D_{-h}(D_hu)$, $g\in W^{1,2}(\mathbb{R}^n)$ car $u\in W^{1,2}(\mathbb{R}^n)$ donc on a

$$\int_{\mathbb{R}^n}\nabla(D_{-h}(D_hu)).\nabla u+\int_{\mathbb{R}^n}\overline{u}D_{-h}(D_hu)=\int_{\mathbb{R}^n}\overline{f}D_{-h}(D_hu).$$

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^n}\overline{u}(x)D_{-h}(D_hu(x))\ \mathrm{d}x &= \frac{1}{\|h\|}\left(\int_{\mathbb{R}^n}\overline{u}(x)\tau_{-h}D_hu(x)\ \mathrm{d}x-\int_{\mathbb{R}^n}\overline{u}(x)D_hu(x)\ \mathrm{d}x\right) \\ &= \frac{1}{\|h\|}\left(\int_{\mathbb{R}^n}\overline{u}(x)D_hu(x-h)\ \mathrm{d}x-\int_{\mathbb{R}^n}\overline{u}(x)D_hu(x)\ \mathrm{d}x\right) \\ &= \frac{1}{\|h\|}\left(\int_{\mathbb{R}^n}\overline{u}(x+h)D_hu(x)\ \mathrm{d}x-\int_{\mathbb{R}^n}\overline{u}(x)D_hu(x)\ \mathrm{d}x\right) \\ &= \int_{\mathbb{R}^n}|D_hu|^2.\end{aligned}$$

En utilisant la linéarité du gradient, on a de même

$$\int_{\mathbb{R}^n}\nabla(D_{-h}(D_hu)).\nabla u=\int_{\mathbb{R}^n}\nabla D_hu.\nabla D_hu.$$

Ainsi, on a

$$\|D_hu\|^2_{W^{1,2}(\mathbb{R}^n)}=\int_{\mathbb{R}^n}(\nabla D_hu)^2+\int_{\mathbb{R}^n}(D_hu)^2\leq\|f\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}\|D_{-h}(D_hu)\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}.$$

D'après le lemme précédent, pour tout $v \in W^{1,2}(\mathbb{R}^n)$, on a

$$\|D_h v\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} \leq \|(\nabla v.\nabla v)^{\frac{1}{2}}\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}.$$

En particulier, en l'appliquant à $v = D_h u$ dans l'égalité précédente, on a

$$\|D_h u\|^2_{W^{1,2}(\mathbb{R}^n)} \leq \|f\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}\| \quad \|(\nabla(D_h u).\nabla(D_h u))^{\frac{1}{2}}\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} \leq \|f\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}\|D_h u\|_{W^{1,2}(\mathbb{R}^n)}.$$

Ainsi,

$$\|D_h u\|_{W^{1,2}(\mathbb{R}^n)} \leq \|f\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}.$$

Puis, pour tout $i \in [\![1, n]\!]$,

$$\left\|D_h \frac{\partial u}{\partial x_i}\right\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} \leq \|f\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}.$$

Par le lemme précédent, pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, $\frac{\partial u}{\partial x_i} \in W^{1,2}(\mathbb{R}^n)$ et par suite $u \in W^{2,2}(\mathbb{R}^n)$. $\square$

Proposition 5.2.7 *Soient f et g dans $W^{2,2}(\mathbb{R}^n)$, on a*

$$\langle -\Delta f | g \rangle_H = \int_{\mathbb{R}^n} \nabla f.\nabla g.$$

Démonstration :

Soit $(u_m)_{m\in\mathbb{N}}$ une suite de $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ qui tende vers g dans $W^{1,2}(\mathbb{R}^n)$.
Pour $i \in [\![1, n]\!]$, soit $(v_{i,m})_{m\in\mathbb{N}}$ une suite de $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ qui tende vers $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ dans $W^{1,2}(\mathbb{R}^n)$.
Soient $(m_i)_{i\in[\![0,n]\!]} \in \mathbb{N}^{n+1}$ et Ω un ouvert borné tel que u_{m_0} soit nulle en dehors de Ω,

$$\left\langle -\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial v_{i,m_i}}{\partial x_i} \middle| u_{m_0} \right\rangle_H = \sum_{i=1}^{n} \int_{\Omega} -\frac{\partial v_{i,m_i}}{\partial x_i}\overline{u_{m_0}} = \sum_{i=1}^{n} \int_{\Omega} v_{i,m_i} \overline{\frac{\partial u_{m_0}}{\partial x_i}} = \sum_{i=1}^{n} \int_{\mathbb{R}^n} v_{i,m_i} \overline{\frac{\partial u_{m_0}}{\partial x_i}}.$$

Ceci d'après la formule de Green. Soit $i \in [\![1, n]\!]$,
Comme $(v_{i,m})$ tend vers $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ dans $W^{1,2}(\mathbb{R}^n)$, $v_{i,m}$ tend vers $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ dans H et $\frac{\partial v_{i,m}}{\partial x_i}$ tend vers $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2}$ dans H. En passant à la limite quand m_i tend vers l'infini pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, on a

$$-\sum_{i=1}^{n} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2}\overline{u_{m_0}} = \sum_{i=1}^{n} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{\partial f}{\partial x_i} \overline{\frac{\partial u_{m_0}}{\partial x_i}}.$$

En passant à la limite quand m_0 tend vers l'infini, on a

$$\langle -\Delta f | g \rangle_H = \int_{\mathbb{R}^n} \nabla f.\nabla g.$$

$\square$

Proposition 5.2.8 *L'opérateur Δ est dissipatif.*

Démonstration :

Soit $f \in W^{2,2}(\mathbb{R}^n)$, d'après la Proposition 5.2.7

$$\langle -\Delta f | f \rangle_H = \int_{\mathbb{R}^n} \|\nabla f\|^2_{\mathbb{R}^n} \geq 0.$$

Si $\lambda > 0$, $\|(\lambda I - \Delta)f\|^2 = \lambda^2\|f\|^2 + \|\Delta f\|^2 + 2\langle -\Delta f | f \rangle_H \geq \lambda^2 \|f\|^2$. $\square$

Proposition 5.2.9 *Im$(I - \Delta) = H$*

Démonstration :
Soit $f \in H$, par les Théorèmes précédents, il existe $u \in W^{2,2}(\mathbb{R}^n)$ telle que pour tout $h \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$,

$$\int_{\mathbb{R}^n} \nabla h . \nabla u + \int_{\mathbb{R}^n} \overline{u} h = \int_{\mathbb{R}^n} \overline{f} h.$$

Par la formule de Green, on a

$$\int_{\mathbb{R}^n} \nabla h . \nabla u = - \int_{\mathbb{R}^n} (\Delta \overline{u}) h.$$

Puis $-\Delta u + u = f$ au sens des distributions. □

Proposition 5.2.10 Δ *est auto-adjoint.*

Démonstration :
D'après la Proposition 5.2.7 pour tout f et g dans $W^{2,2}(\mathbb{R}^n)$,

$$\langle \Delta f | g \rangle = \langle f | \Delta g \rangle.$$

□

Proposition 5.2.11 Δ *est fermé à domaine dense.*

Démonstration :
Montrons que $D(\Delta)^{\perp} = \{0\}$. Soit $y \in D(\Delta)^{\perp}$. D'après la Proposition 5.2.9, il existe $u \in D(\Delta)$ tel que $y = u - \Delta u$. Ainsi, pour tout $x \in D(\Delta)$, on a

$$0 = \langle x | y \rangle = \langle x | u - \Delta u \rangle = \langle x - \Delta x | u \rangle$$

car Δ est autoadjoint. Ainsi $u \in \operatorname{Im}(I - \Delta)^{\perp} = \{0\}$. On a donc que $y = 0$ puis $D(\Delta)^{\perp} = \{0\}$.
Le domaine $D(\Delta)$ est donc dense dans H.
De plus $\operatorname{Im}(I - \Delta) = H$ et Δ est dissipatif donc $I - \Delta$ est inversible et $\rho(\Delta) \neq \varnothing$. Donc, comme dans le Corollaire 3.2.10, on a que Δ est fermé. □

5.3 Résolution de l'équation

On peut maintenant justifier l'existence et l'unicité des solutions de (EC).

Théorème 5.3.1 *L'équation* (EC) *admet une unique solution pour toute condition initiale* $u(0) \in L^2(\mathbb{R}^n)$.

Démonstration :
On vient de montrer dans la section précédente que Δ était autoadjoint et dissipatif. Cela implique que l'image numérique $W(-\Delta) = W(-\Delta^{\star}) \subset \mathbb{R}^+$. De plus $-\Delta$ est fermé et à domaine dense. Donc, par le Théorème 4.1.7, pour tout $\varepsilon \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$, Δ génère un semi-groupe holomorphe d'angle $\frac{\pi}{2} - \varepsilon$. Δ génère donc un semi-groupe holomorphe d'angle $\frac{\pi}{2}$. On conclut ainsi par le Corollaire 4.1.8 à l'existence et l'unicité d'une solution de (EC) pour toute condition initiale. □

On va maintenant chercher à l'expliciter. Pour cela on utilisera la transformée de Fourier définie sur $L^2(\mathbb{R}^n)$ par

$$\mathcal{F}(f) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x) e^{-i\langle x | \cdot \rangle} \, \mathrm{d}x = \lim_{\substack{R \to \infty \\ L^2(\mathbb{R}^n)}} \int_{[-R,R]^n} f(x) e^{-i\langle x | \cdot \rangle} \, \mathrm{d}x.$$

Cette égalité n'est pas une égalité ponctuelle mais une égalité de fonction dans $L^2(\mathbb{R}^n)$ et la limite est également dans $L^2(\mathbb{R}^n)$. De plus $\mathcal{F}$ est une bijection de $L^2(\mathbb{R}^n)$ sur $L^2(\mathbb{R}^n)$. On note sa réciproque $\overline{\mathcal{F}}$ et on a

$$\overline{\mathcal{F}}(f)(\xi) = \frac{1}{(2\pi)^n}\mathcal{F}(f)(-\xi).$$

Théorème 5.3.2 *L'unique solution u de l'équation* (EC) *vérifiant $u(0) = f \in H$ est donnée par*

$$u(t,x) = \frac{1}{(4\pi t)^{\frac{n}{2}}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-\frac{\|x-y\|^2}{4t}} \ f(y) \ \mathrm{d}y$$

pour tout $t > 0$ et $x \in \mathbb{R}^n$.

Démonstration :
On sait déjà que l'équation (EC) admet une unique solution continue sur $\mathbb{R}^+$ et dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$. Il suffit donc de déterminer l'expression de cette solution sur $\mathbb{R}_+^*$ que l'on notera u.
En appliquant la transformé de Fourier à l'équation (EC), on obtient pour tout $t > 0$

$$\mathcal{F}\left(\frac{\partial u}{\partial t}(t)\right) = \mathcal{F}(\Delta u(t)).$$

Or, on a d'une part que pour presque tout $\xi \in \mathbb{R}^n$

$$\mathcal{F}\left(\frac{\partial u}{\partial t}(t)\right)(\xi) = \frac{\partial}{\partial t}\mathcal{F}(u(t))(\xi)$$

et d'autre part, du fait que $u(t) \in W^{2,2}(\mathbb{R}^n)$, que

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}(\Delta u(t))(\xi) &= \sum_{k=1}^n \mathcal{F}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial {x_k}^2}(t)\right)(\xi) \\
&= \sum_{k=1}^n (i\xi_k)^2 \mathcal{F}(u(t))(\xi) \\
&= -\|\xi\|^2 \ \mathcal{F}(u(t))(\xi).
\end{aligned}$$

Ainsi pour ξ fixé l'application $\varphi_\xi : t \mapsto \mathcal{F}(u(t))(\xi)$ vérifie sur $\mathbb{R}_+^*$ l'équation différentielle

$$\varphi_\xi' = -\|\xi\|^2 \ \varphi_\xi.$$

De plus φ_ξ est continue sur $\mathbb{R}^+$ et $\varphi_\xi(0) = \mathcal{F}(f)(\xi)$, donc on obtient que pour tout $t \geq 0$

$$\varphi_\xi(t) = \mathcal{F}(f)(\xi) \ e^{-\|\xi\|^2 t}.$$

Pour trouver u, on applique la transformée de Fourier inverse $\overline{\mathcal{F}}$ et on obtient que pour tout $t > 0$ et $x \in \mathbb{R}^n$, $u(t,x) = \overline{\mathcal{F}}(\xi \mapsto \varphi_\xi(t))(x)$.
Or,

$$\begin{aligned}
\varphi_\xi(t) &= \mathcal{F}(f)(\xi) \ e^{-\|\xi\|^2 t} \\
&= \mathcal{F}(f)(\xi) \ \mathcal{F}(y \mapsto \overline{\mathcal{F}}(x \mapsto e^{-\|x\|^2 t})(y))(\xi) \\
&= \mathcal{F}(f)(\xi) \ \mathcal{F}\left(y \mapsto \frac{1}{(4\pi t)^{\frac{n}{2}}} \ e^{-\frac{\|y\|^2}{4t}}\right)(\xi) \qquad (5.1) \\
&= \mathcal{F}\left(f * \frac{1}{(4\pi t)^{\frac{n}{2}}} \ e^{-\frac{\|\cdot\|^2}{4t}}\right)(\xi).
\end{aligned}$$

L'égalité (5.1) est montrée dans le Lemme 5.3.3 qui suit.
Finalement on obtient pour tout $t > 0$ et $x \in \mathbb{R}^n$

$$\begin{aligned} u(t,x) &= \overline{\mathcal{F}}(\xi \mapsto \varphi_\xi(t))(x) \\ &= \frac{1}{(4\pi t)^{\frac{n}{2}}}\ f * e^{-\frac{\|\cdot\|^2}{4t}} \\ &= \frac{1}{(4\pi t)^{\frac{n}{2}}}\ \int_{\mathbb{R}^n} f(y) e^{-\frac{\|x-y\|^2}{4t}}\ \mathrm{d}y. \end{aligned}$$

Ce qui démontre le résultat voulu. $\square$

Lemme 5.3.3 *Pour tout $\xi \in \mathbb{R}^n$ on a*

$$\overline{\mathcal{F}}(x \mapsto e^{-\|x\|^2 t})(\xi) = \frac{1}{(4\pi t)^{\frac{n}{2}}}\ e^{-\frac{\|\xi\|^2}{4t}}.$$

Démonstration :
On obtient d'abord par le théorème de Fubini que pour tout $\xi \in \mathbb{R}^n$ et $t > 0$,

$$\begin{aligned} \overline{\mathcal{F}}(x \mapsto e^{-\|x\|^2 t})(\xi) &= \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-\|x\|^2 t}\ e^{i\langle x|\xi\rangle}\ \mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{(2\pi)^n} \prod_{k=1}^{n} \int_{\mathbb{R}} e^{-x_k^2 t}\ e^{i x_k \xi_k}\ \mathrm{d}x_k. \end{aligned}$$

Il suffit donc de calculer $g(\omega) = \int_{\mathbb{R}} e^{-x^2 t}\ e^{ix\omega}\ \mathrm{d}x$ pour tout $\omega \in \mathbb{R}$. On peut d'abord remarquer par le théorème de convergence dominée que g est dérivable sur $\mathbb{R}$ et vérifie

$$\begin{aligned} g'(\omega) &= \int_{\mathbb{R}} ixe^{-x^2 t}\ e^{ix\omega}\ \mathrm{d}x \\ &= \left[\frac{-i}{2t} e^{-x^2 t}\ e^{ix\omega}\right]_{-\infty}^{+\infty} + \frac{i}{2t} \int_{\mathbb{R}} e^{-x^2 t}\ i\omega e^{ix\omega}\ \mathrm{d}x \\ &= -\frac{\omega}{2t} g(\omega). \end{aligned}$$

On obtient donc que $g(\omega) = g(0) e^{-\frac{\omega^2}{4t}}$ pour tout $\omega \in \mathbb{R}$. De plus,

$$g(0) = \int_{\mathbb{R}} e^{-x^2 t}\ \mathrm{d}x = \frac{1}{\sqrt{t}} \int_{\mathbb{R}} e^{-x^2}\ \mathrm{d}x = \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{t}}.$$

Ainsi on obtient le résultat souhaité, à savoir

$$\overline{\mathcal{F}}(x \mapsto e^{-\|x\|^2 t})(\xi) = \frac{1}{(2\pi)^n} \prod_{k=1}^{n} \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{t}} e^{-\frac{\xi_k^2}{4t}} = \frac{1}{(4\pi t)^{\frac{n}{2}}}\ e^{-\frac{\|\xi\|^2}{4t}}.$$

$\square$

Bibliographie

[1] Amnon Pazy, *Semigroups of Linear Operators and Applications to Partial Differential Equations*

[2] Klaus-Jochen Engel, Rainer Nagel, *One-Parameter Semigroups for Linear Evolution Equations*

[3] El-Maati Ouhabaz, *Analysis of Heat Equations on Domains*

[4] Haïm Brezis, *Functional Analysis, Sobolev Spaces and Partial Differential Equations*