

# Théorie de l'ensemble vide

LE MANACH Florian

Novembre 2012

## Introduction

Ce document a pour but d'énoncer les principales propriétés de l'ensemble vide qui sont souvent ignorées ou admises alors qu'elles découlent directement de la théorie des ensembles, plus précisément de l'axiomatique de Zermelo.

Pour un maximum de clarté et de rigueur, on se propose ici de partir à zéro.

Le lecteur n'a donc besoin d'aucun prérequis pour suivre ce document.

On commencera par une petite incursion dans le monde de la logique, base de toutes mathématiques, pour ensuite énoncer les axiomes de la théorie des ensembles et enfin atteindre le but souhaité : l'ensemble vide.

## 1 Un peu de logique

Avant toute chose, il faut essayer de se mettre d'accord sur quelques notions de base comme la définition de logique ou de mathématiques. C'est sûrement la partie la plus délicate, car on part de « rien » et on doit essayer de construire quelque chose qui soit naturel et compris par le plus grand nombre. Essayons de donner une définition de mathématiques. Pour cela nous allons emprunter des termes du langage courant et utiliser l'intuition de chacun qui, espérons-le, est universelle.

- On peut voir les *mathématiques* comme la « collection » ou l'« ensemble » de tous les *univers*.
- Chaque *univers* est constitué d'« assertions » étant chacune soit « vraie », soit « fausse ».
- Une *logique* dans un univers est une collection de « relations » permettant de « relier » plusieurs assertions entre elles.
- Enfin étant donnée un univers et une logique, on appelle *axiomatique* une famille d'assertion pouvant engendrer l'univers grâce à sa logique, c'est à dire que toute assertion de l'univers est en relation avec les assertions de l'axiomatique.

Concrètement, en mathématiques, on se donne une logique et une axiomatique, et on cherche à découvrir l'univers engendré. Plus simplement, on cherche les assertions qui se déduisent logiquement des axiomes (éléments de l'axiomatique).

La logique utilisée par la plupart des mathématiciens et celle qu'on utilisera est la suivante.

Etant données deux assertions  $P$  et  $Q$ , on « construit » les nouvelles assertions suivantes :

$$\text{non } P ; P \text{ et } Q ; P \text{ ou } Q ; P \text{ ou bien } Q ; P \Rightarrow Q ; P \Leftrightarrow Q.$$

La valeur de vérité de ces assertions est déterminée par celle de  $P$  et  $Q$  suivant cette table de vérité (V pour vraie et F pour faux) :

$P$	$Q$	$\text{non } P$	$P \text{ et } Q$	$P \text{ ou } Q$	$P \text{ ou bien } Q$	$P \Rightarrow Q$	$P \Leftrightarrow Q$
V	V	F	V	V	F	V	V
F	V	V	F	V	V	V	F
V	F	F	F	V	V	F	F
F	F	V	F	F	F	V	V

*Remarque :* Etant donnée une assertion  $P$ , on convient qu'écrire  $P$  revient à affirmer que l'assertion  $P$  est vraie.

## 2 Théorie des ensembles

La théorie des ensemble permet grâce à l'axiomatique de Zermelo de décrire les premières propriétés des ensembles. Le but souhaité étant d'étudier l'ensemble vide, il ne semble pas déraisonnable de regarder de plus près cette axiomatique.

Dans cette axiomatique on considère un monde constitué uniquement d'objets appelés *ensembles*. Donc tous les objets sont de même nature, de même type. On munit cette collection d'ensemble d'une relation binaire notée  $\in$ . Cela signifie que si  $x$  et  $y$  sont des ensembles, «  $x \in y$  » est une assertion, elle est donc soit vraie, soit fausse.

On obtient ainsi une collection d'assertions. A partir de celle-ci, on peut créer de nouvelles assertions en utilisant la logique vu précédemment.

Par exemple, on a l'assertion suivante «  $\text{non } (x \in y)$  ».

Elle sera également notée «  $x \notin y$  ».

Ces assertions dépendent des ensembles. Certaines assertions sont vraies quelque soit les ensembles utilisés. Si  $P_x$  est une assertion (qui dépend d'un ensemble  $x$ ) et qu'elle est vraie pour tous les ensembles, on notera «  $\forall x P_x$  ».

Cela définit une nouvelle assertion. Par exemple, l'assertion suivante est vraie

«  $\forall x \forall y ((x \in y) \text{ ou bien } (x \notin y))$  ».

A partir de la relation  $\in$ , on construit une nouvelle relation binaire notée  $=$  telle que l'assertion suivante soit vraie.

**Axiome 1** (*axiome d'extensionnalité*)

$$\forall x \forall y (x = y \Leftrightarrow \forall z (z \in x \Leftrightarrow z \in y))$$

On peut également construire une autre relation binaire notée  $\subset$  définie par

$$\forall x \forall y (x \subset y \Leftrightarrow \forall z (z \in x \Rightarrow z \in y)).$$

On note «  $x \neq y$  » pour désigner « *non* ( $x = y$ ) ».

Le second axiome porte sur l'existence d'ensemble.

Il est nécessaire à la construction de l'ensemble vide.

**Axiome 2** (*axiome de l'existence*)

*Il existe un ensemble.*

On peut désormais utiliser un nouveau symbole  $\exists$ . Si une assertion  $P_x$  est vraie pour au moins un ensemble, on notera «  $\exists x P_x$  », ce qui définit une nouvelle assertion.

On va maintenant se donner la possibilité de « créer » de nouveaux ensembles.

**Axiome 3** (*axiome de la paire*)

$$\forall x \forall y \exists u (\forall z (z \in u \Leftrightarrow (z = x \text{ ou } z = y)))$$

Cet axiome nous dit qu'étant donnée deux ensembles  $x$  et  $y$ , on peut considérer un ensemble  $u$  contenant exactement  $x$  et  $y$ . De plus cet ensemble  $u$  est unique, c'est à dire que pour tout ensemble  $v$  vérifiant également cette condition on a  $u = v$ .

En effet si  $\forall z (z \in u \Leftrightarrow (z = x \text{ ou } z = y))$  et  $\forall z (z \in v \Leftrightarrow (z = x \text{ ou } z = y))$  on a alors  $\forall z (z \in u \Leftrightarrow z \in v)$  c'est à dire  $u = v$  par l'axiome d'extensionnalité.

On décide alors de le noter  $\{x, y\}$ . On définit également  $\{x\}$  comme étant  $\{x, x\}$  et on l'appelle le singleton de l'ensemble  $x$ .

**Axiome 4** (*axiome de la réunion*)

$$\forall x \exists u (\forall z (z \in u \Leftrightarrow \exists y (y \in x \text{ et } z \in y)))$$

Cet axiome nous permet de considérer l'ensemble  $u$  comme étant l'union des ensembles contenus dans  $x$ . Cet ensemble est également unique par l'axiome d'extensionnalité. On le note  $\cup x$ . De plus on note  $x \cup y$  pour désigner  $\cup\{x, y\}$ .

**Axiome 5** (*axiome des parties*)

$$\forall x \exists u (\forall z (z \in u \Leftrightarrow z \subset x))$$

Cet axiome nous permet de considérer l'ensemble  $u$  contenant tous les ensembles inclus dans  $x$ . Cet ensemble est unique par extensionnalité. On l'appelle l'ensemble des parties de  $x$  et on le note  $\mathcal{P}(x)$ .

Le prochain axiome est en fait un schéma d'axiome, c'est à dire une collection d'axiome « indexée » par les assertions que l'on a pu construire depuis le début de la théorie des ensembles.

**Axiome 6** (*Schéma d'axiome de compréhension*)

Soit  $P$  une assertion obtenue avec les différents outils utilisés précédemment ( $\in, =, \forall, \exists$ , et toute la logique).

$$\forall x \exists u (\forall z (z \in u \Leftrightarrow (z \in x \text{ et } P)))$$

Il nous donne l'existence d'ensembles dont les éléments appartiennent à un ensemble fixé et qui vérifient certaines propriétés. Etant donnée une assertion  $P$  et un ensemble  $x$ , l'ensemble  $u$  vérifiant  $\forall z (z \in u \Leftrightarrow (z \in x \text{ et } P))$  est unique par extensionnalité. Il est noté  $\{z \in x, P\}$ .

**Axiome 7** (*axiome de l'infini*)

$$\exists x (\exists y (y \in x) \text{ et } \forall z (z \in x \Rightarrow z \cup \{z\} \in x))$$

Ce dernier axiome permet de considérer un ensemble  $x$  que l'on dit « infini ».

Ces sept axiomes permettent de définir les premières propriétés des ensembles. Il faudrait montrer qu'ils sont bien indépendants, c'est à dire qu'aucun ne se déduit logiquement des autres, et qu'ils sont bien cohérent, c'est à dire qu'ils n'engendrent pas une assertion à la fois vraie et fausse. Cependant, on ne le fera pas ici car cela nous éloignerais de notre objectif : l'ensemble vide.

Tous les outils nécessaires à la définition de l'ensemble vide sont réunis donc ne perdons plus de temps et allons-y !

### 3 L'ensemble vide

**Propriété 1** (*définition de l'ensemble vide*)

$$\exists x \forall z (z \notin x)$$

De plus cet ensemble  $x$  est unique.

On l'appelle ensemble vide et on le note  $\emptyset$  ou  $\varnothing$ .

**Démonstration :**

D'après l'axiome de l'existence, il existe un ensemble. Donc soit  $a$  un ensemble. On utilise ensuite le schéma d'axiome de compréhension avec une assertion fausse

pour définir l'ensemble vide. Ainsi d'après cet axiome l'ensemble  $\{z \in a, z \neq z\}$  existe et est unique. Notons le  $x$ . Montrons qu'il vérifie  $\forall z(z \notin x)$  et que si  $y$  vérifie également cette assertion alors  $x = y$ . Soit  $z$  un ensemble.

$$\begin{aligned}(z \notin x) &\Leftrightarrow \text{non } (z \in x) \\ &\Leftrightarrow \text{non } (z \in a \text{ et } z \neq z) \\ &\Leftrightarrow (\text{non } z \in a) \text{ ou } (\text{non } z \neq z) \\ &\Leftrightarrow (z \notin a) \text{ ou } (z = z)\end{aligned}$$

Or  $\forall z(z = z)$  donc  $\forall z((z \notin a) \text{ ou } (z = z))$  ainsi  $\forall z(z \notin x)$ .  
On vient d'établir l'existence. Reste l'unicité.  
Soit  $x$  et  $y$  tel que  $\forall z(z \notin x)$  et  $\forall z(z \notin y)$ .

$$\begin{aligned}(z \in x) &\Leftrightarrow \text{non } (z \notin x) \\ &\Leftrightarrow \text{non } (z \notin y) \\ &\Leftrightarrow (z \in y)\end{aligned}$$

La deuxième équivalence vient du fait que  $z \notin x$  et  $z \notin y$  sont deux assertions vraies quelque soit  $z$ . On obtient donc  $\forall z(z \in x) \Leftrightarrow (z \in y)$ .

Ainsi par l'axiome d'extensionnalité  $x = y$  ce qui montre l'unicité.  $\square$

## Propriété 2

$$\forall x (\emptyset \subset x) \text{ et } \forall x (\emptyset \in \mathcal{P}(x)), \text{ par contre } \exists x (\emptyset \notin x)$$

### Démonstration :

D'après la propriété 1, on a  $\forall z(z \notin \emptyset)$ . Donc l'assertion  $z \in \emptyset$  est fausse pour tout ensemble  $z$ . Ainsi l'assertion suivante est vraie,  $\forall x \forall z(z \in \emptyset) \Rightarrow (z \in x)$  quelque soit la valeur de l'assertion  $z \in x$ . On a donc par définition  $\forall x(\emptyset \subset x)$ . Il vient également par définition de l'ensemble des parties que  $\forall x(\emptyset \in \mathcal{P}(x))$ .

Il reste à trouver un ensemble  $x$  vérifiant  $\emptyset \notin x$ . On peut prendre  $x = \emptyset$ . En effet  $\forall z(z \notin \emptyset)$  donc  $\emptyset \notin \emptyset$ . Mais ce n'est pas le seul.

On peut aussi considérer l'ensemble  $\{\{\emptyset\}\}$  le singleton de l'ensemble, singleton ensemble vide. Notons  $x$  cet ensemble.

$$\begin{aligned}\emptyset \in x &\Leftrightarrow \emptyset = \{\emptyset\} \text{ ou } \emptyset = \{\emptyset\} \\ &\Leftrightarrow \emptyset = \{\emptyset\} \\ &\Leftrightarrow (\forall z(z \in \emptyset) \Leftrightarrow (z \in \{\emptyset\})) \\ &\Leftrightarrow (\forall z(z \in \emptyset) \Leftrightarrow (z = \emptyset))\end{aligned}$$

Or l'assertion «  $\forall z(z \in \emptyset) \Leftrightarrow (z = \emptyset)$  » est fausse car si pour  $z$  on prend  $\emptyset$ , on a que l'assertion «  $\emptyset \in \emptyset$  » est fausse d'après la propriété 1 et l'assertion «  $\emptyset = \emptyset$  » est vraie. Comme  $\emptyset \in x \Leftrightarrow (\forall z(z \in \emptyset) \Leftrightarrow (z = \emptyset))$ , on a alors  $\emptyset \notin x$ .  $\square$

On a défini la réunion de deux ensembles grâce à l'axiome de la réunion. On peut également définir l'intersection de deux ensembles grâce au schéma d'axiome de compréhension (ce que l'on ne pouvait pas faire avec la réunion sans l'axiome de la réunion car il aurait fallu trouver un ensemble dans lequel tous les éléments de la réunion appartiennent). Soit  $x$  et  $y$  deux ensemble. On note  $x \cap y$  l'ensemble  $\{z \in x, z \in y\}$ . On peut montrer que

$$x \cap y = \{z \in x, z \in y\} = \{z \in y, z \in x\} = \{z \in x \cup y, z \in x \text{ et } z \in y\}$$

**Propriété 3**

$$\forall x (x \cup \emptyset = x) \text{ et } (x \cap \emptyset = \emptyset)$$

**Démonstration :**

Soit  $x$  et  $z$  des ensembles.

$$\begin{aligned} z \in x \cup \emptyset &\Leftrightarrow \exists y (y \in \{x, \emptyset\} \text{ et } z \in y) \\ &\Leftrightarrow \exists y ((y = x \text{ ou } y = \emptyset) \text{ et } z \in y) \\ &\Leftrightarrow (\exists y (y = x \text{ et } z \in y)) \text{ ou } (\exists y (y = \emptyset \text{ et } z \in y)) \\ &\Leftrightarrow z \in x \text{ ou } z \in \emptyset \\ &\Leftrightarrow z \in x \end{aligned}$$

On utilise ici l'axiome de la réunion et l'axiome de la paire pour les deux première équivalence. La dernière équivalence est vraie car l'assertion «  $z \in \emptyset$  » est fausse (propriété 1). L'axiome d'extensionnalité nous donne donc  $\forall x (x \cup \emptyset = x)$ .

Pour l'intersection on obtient,

$$\begin{aligned} z \in x \cap \emptyset &\Leftrightarrow (z \in x) \text{ et } (z \in \emptyset) \\ &\Leftrightarrow z \in \emptyset \end{aligned}$$

La seconde équivalence vient encore du fait que l'assertion «  $z \in \emptyset$  » est fausse ce qui entraîne que l'assertion «  $(z \in x) \text{ et } (z \in \emptyset)$  » est aussi fausse et donc l'équivalence est vraie. Ainsi par extensionnalité  $\forall x (x \cap \emptyset = \emptyset)$ .  $\square$

Nous allons maintenant définir la notion de produit cartésien, de fonction et d'application pour voir comment l'ensemble vide se comporte avec ces objets.

**Définition 1** (couple de deux ensembles)

Soit  $x$  et  $y$  deux ensembles. L'ensemble  $\{\{x\}, \{x, y\}\}$  est noté  $(x, y)$  et appelé couple de  $x$  et  $y$ . On remarque que cet ensemble est bien définie par l'axiome de la paire et est unique par l'axiome d'extensionnalité. De plus on a  $(x, y) = (y, x) \Rightarrow x = y$ .

**Définition 2** (produit cartésien de deux ensembles)

Soit  $x$  et  $y$  deux ensembles. On note  $x \times y$  et on appelle produit cartésien de  $x$  et  $y$  l'ensemble

$$x \times y = \{z \in \mathcal{P}(\mathcal{P}(x \cup y)), \exists u \exists v (u \in x \text{ et } v \in y \text{ et } z = (u, v))\}$$

Cet ensemble est bien définie et unique par le schéma d'axiomes de compréhension.

**Propriété 4**

$$\forall x (x \times \emptyset = \emptyset) \text{ et } (\emptyset \times x = \emptyset)$$

**Démonstration :**

Soit  $x$  et  $z$  des ensembles.

$$\begin{aligned} z \in x \times \emptyset &\Leftrightarrow z \in \mathcal{P}(\mathcal{P}(x \cup \emptyset)) \text{ et } \exists u \exists v (u \in x \text{ et } v \in \emptyset \text{ et } z = (u, v)) \\ &\Leftrightarrow z \in \emptyset \end{aligned}$$

La dernière équivalence vient du fait que «  $v \in \emptyset$  » et «  $z \in \emptyset$  » sont toutes deux des assertions fausses.

On a donc  $\forall x (x \times \emptyset = \emptyset)$  et de même on obtient également  $\forall x (\emptyset \times x = \emptyset)$ .  $\square$

**Définition 3** (*fonction*)

Soit  $x$  et  $y$  deux ensembles. On appelle fonction de  $x$  dans  $y$  tout ensemble  $f$  vérifiant

$$f \subset x \times y \text{ et } \forall u \forall v \forall w ((u, v) \in f \text{ et } (u, w) \in f) \Rightarrow (v = w)$$

**Définition 4** (*application*)

Soit  $x$  et  $y$  deux ensembles. On appelle application de  $x$  dans  $y$  toute fonction  $f$  vérifiant

$$\forall u (u \in x \Rightarrow \exists v (u, v) \in f)$$

La notation «  $f : x \rightarrow y$  » signifie que  $f$  est une application de  $x$  dans  $y$ .

**Propriété 5** Pour tout ensemble  $x$ , il existe une unique fonction de  $\emptyset$  dans  $x$  et il existe une unique fonction de  $x$  dans  $\emptyset$ , à savoir  $\emptyset$ .