Cyclicité dans les espaces ℓ^p à poids

Florian Le Manach

sous la direction de Mohamed Zarrabi et Karim Kellay

université de BORDEAUX

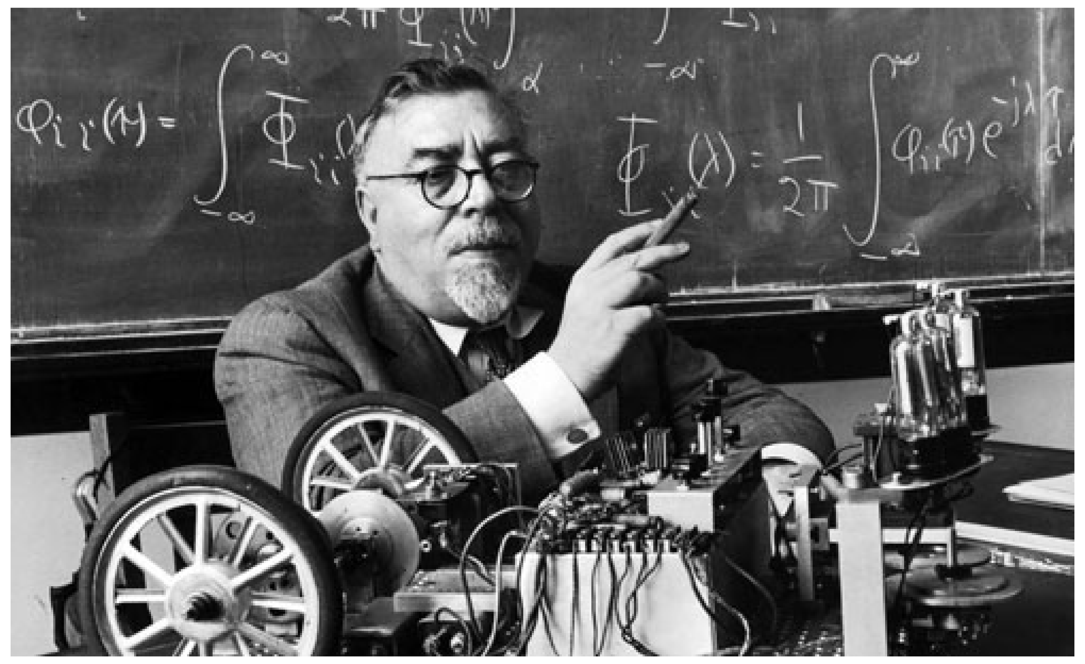
Cadre général

On considère un espace de Banach X de l'espace des suites indexées sur $\mathbb{Z}$, à valeurs dans $\mathbb{C}$ qui est stable par translation à droite et à gauche. On appelle vecteur cyclique de X toute suite $(u_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ de X dont le sous-espace vectoriel engendré par les translatés (u_n) est dense dans X, ou autrement dit

$$\overline{\mathrm{span}\{(u_{n+k})_{n\in\mathbb{Z}},\ k\in\mathbb{Z}\}} = X.$$

Le but de la recherche est d'étudier des conditions nécessaires et des conditions suffisantes à la cyclicité voire essayer de trouver une caractérisation. Le cas $X = \ell^p(\mathbb{Z})$ a été étudié par Wiener, Beurling, Newman et plus récemment par Lev et Olevskii. Nous nous sommes intéressés aux espaces $\ell^p(\mathbb{Z})$ avec poids.

Premiers résultats de Wiener



Norbert Wiener (1894-1964)

En 1932 Norbert Wiener s'intéressa à la cyclicité et il en donna une caractérisation dans les espaces $\ell^1(\mathbb{Z})$ et $\ell^2(\mathbb{Z})$ faisant intervenir la transformée de Fourier.

Théorème. *(Wiener 1932)*

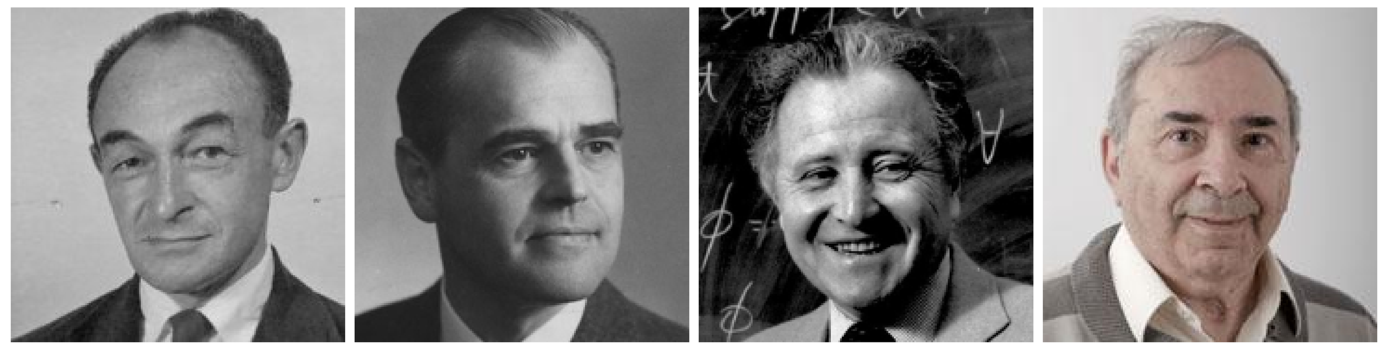
1. *Une suite $u \in \ell^1(\mathbb{Z})$ est cyclique dans $\ell^1(\mathbb{Z})$ si et seulement si sa transformée de Fourier $\hat{u}$ ne s'annule pas sur le cercle $\mathbb{T} = \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$.*
2. *Une suite $u \in \ell^2(\mathbb{Z})$ est cyclique dans $\ell^2(\mathbb{Z})$ si et seulement si sa transformée de Fourier $\hat{u}$ ne s'annule pas presque partout (pour la mesure de Lebesgue) sur le cercle $\mathbb{T} = \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$.*

avec $\hat{u} : t \mapsto \sum_{n\in\mathbb{Z}} u_n e^{int}$.

Dans les deux cas on remarque que u est cyclique si et seulement si l'ensemble $\mathcal{Z}(\hat{u})$ des zéros de $\hat{u}$ est « petit » (vide pour $p = 1$ et de mesure de Lebesgue nulle pour $p = 2$). Ainsi Wiener conjectura que ce résultat devrait rester vrai pour $1 < p < 2$ avec la notion de « $\mathcal{Z}(\hat{u})$ petit » à définir et qui doit se situer entre $\mathcal{Z}(\hat{u}) = \varnothing$ et $\mathcal{Z}(\hat{u})$ de mesure nulle.

Résultats sur la cyclicité dans $\ell^p(\mathbb{Z})$

Dans cette partie on s'intéresse au lien entre la cyclicité et les zéros de la transformée de Fourier. Pour pouvoir définir l'ensemble $\mathcal{Z}(\hat{u}) = \{t \in \mathbb{T},\ \hat{u}(t) = 0\}$, on va considérer $u \in \ell^1(\mathbb{Z})$, de sorte que $\hat{u}$ soit continue.



Raphaël Salem (1898-1963), Arne Beurling (1905-1986), Donald J. Newman (1930-2007), Alexander Olevskii

La caractérisation de la cyclicité dans $\ell^p(\mathbb{Z})$ est a priori un problème difficile. Il existe cependant un cas facile dans lequel la cyclicité se caractérise grâce à l'ensemble $\mathcal{Z}(\hat{u})$: c'est le cas $p > 2$. Une suite u est cyclique dans $\ell^p(\mathbb{Z})$ avec $p > 2$ si et seulement si $\mathcal{Z}(\hat{u})$ ne supporte aucune distribution non nulle à coefficients de Fourier dans $l^q(\mathbb{Z})$ avec $q = \frac{p}{p-1}$. Cette condition n'est cependant pas effective.

En 1951, Arne Beurling détermina une condition suffisante à la cyclicité dans $l^p(\mathbb{Z})$ pour $1 < p < 2$

Théorème. *(Beurling 1951) Soit $u \in \ell^1(\mathbb{Z})$ et $1 < p < 2$.*
Si la dimension de Hausdorff de $\mathcal{Z}(\hat{u})$ est strictement inférieure à $\frac{2(p-1)}{p}$ alors u est cyclique dans $\ell^p(\mathbb{Z})$.

La même année Raphaël Salem démontra que la borne $\frac{2(p-1)}{p}$ du théorème précédent est optimale.

Théorème. *(Salem 1951) Soit $1 < p < 2$.*
Pour tout $\frac{2(p-1)}{p} < \alpha \leq 1$ il existe $u \in \ell^1(\mathbb{Z})$ non cyclique dans $\ell^p(\mathbb{Z})$ vérifiant $\dim(\mathcal{Z}(\hat{u})) = \alpha$.

En 1964, Donald J. Newman étudia le cas limite $\dim(\mathcal{Z}(\hat{u})) = \frac{2(p-1)}{p}$. Plus précisement il regarda le cas où la α-mesure de $\mathcal{Z}(\hat{u})$ est nulle pour $\alpha = \frac{2(p-1)}{p}$. Il posa la question suivante.

L'égalité $H_\alpha(\mathcal{Z}(u)) = 0$ implique-t-elle que u soit cyclique dans $\ell^p(\mathbb{Z})$?

Newman répondit partiellement à cette question en introduisant la notion de α-mesure forte (voir [5]). Il étudia également le cas $\dim(\mathcal{Z}(\hat{u})) = 1$.

Théorème. *(Newman 1964) Soit $u \in \ell^1(\mathbb{Z})$ et $1 < p < 2$.*

1. *Si $\mathcal{Z}(\hat{u})$ est de α-mesure forte 0 pour $\alpha = \frac{2(p-1)}{p}$ alors u est cyclique dans $\ell^p(\mathbb{Z})$.*
2. *Il existe $v \in \ell^1(\mathbb{Z})$ cyclique dans $\ell^p(\mathbb{Z})$ pour tout $p > 1$ et tel que $\dim(\mathcal{Z}(\hat{v})) = 1$.*

En 2011, Nir Lev et Alexander Olevskii infirment la conjecture de Wiener. Ils démontrent que l'on ne peut pas caractériser la cyclicité d'un vecteur u dans $\ell^p(\mathbb{Z})$, $1 < p < 2$, en utilisant seulement $\mathcal{Z}(\hat{u})$, les zéros de la transformée de Fourier.

Théorème. *(Lev et Olevskii 2011) Pour $1 < p < 2$, il existe u et v dans $\ell^1(\mathbb{Z})$ tels que $\mathcal{Z}(\hat{u}) = \mathcal{Z}(\hat{v})$ et tels que u soit cyclique dans $\ell^p(\mathbb{Z})$ et v ne soit pas cyclique dans $\ell^p(\mathbb{Z})$.*

La question de la caractérisation de la cyclicité dans $\ell^p(\mathbb{Z})$, $1 < p < 2$, reste toujours ouverte.

Cyclicité dans les espaces ℓ^p à poids

Nous nous sommes intéressés à la cyclicité dans les espaces ℓ^p à poids de la forme

$$\ell^p_\beta(\mathbb{Z}) = \left\{u = (u_n)_{n\in\mathbb{Z}} \in \mathbb{C}^{\mathbb{Z}},\ \ \|u\|^p_{\ell^p_\beta} = \sum_{n\in\mathbb{Z}} |u_n|^p (1+|n|)^{p\beta} < \infty\right\}$$

avec $p \geq 1$ et $\beta \in \mathbb{R}$. Dans toute la suite on notera $q = \frac{p}{p-1}$.

Comme dans le cas des ℓ^p sans poids, il existe ici aussi deux « familles » d'espaces où la caractérisation de la cyclicité est facile : lorsque $\ell^p_\beta(\mathbb{Z})$ est une algèbre de Banach et lorsque $p = 2$.

Théorème. *Soit $1 \leq p < \infty$ and $\beta > 0$.*

1. *$\ell^p_\beta(\mathbb{Z})$ est une algèbre de Banach si et seulement si $\beta q > 1$. De plus lorsque $\beta q > 1$, un vecteur $u \in \ell^p_\beta(\mathbb{Z})$ est cyclique dans $\ell^p_\beta(\mathbb{Z})$ si et seulement si $\hat{u}$ ne s'annule pas sur $\mathbb{T}$.*
2. *Si $\beta \leq \frac{1}{2}$, un vecteur $u \in \ell^1_\beta(\mathbb{Z})$ est cyclique dans $\ell^2_\beta(\mathbb{Z})$ si et seulement si la $1-2\beta$-capacité (cf [2]) de $\mathcal{Z}(\hat{u})$ est nulle.*

Nous avons obtenu les résultats suivants qui généralisent les résultats de Beurling, Salem et Newman.

Théorème. *Soit $1 < p < 2$, $\beta \geq 0$ tel que $\beta q \leq 1$ et $u \in \ell^1_\beta(\mathbb{Z})$.*

1. *Si $\dim(\mathcal{Z}(\hat{u})) < \frac{2}{q}(1-\beta q)$ alors u est cyclique dans $\ell^p_\beta(\mathbb{Z})$.*
2. *Si $\dim(\mathcal{Z}(\hat{u})) > 1-\beta q$ alors u n'est pas cyclique dans $\ell^p_\beta(\mathbb{Z})$.*
3. *Pour $\frac{2}{q}(1-\beta q) \leq \alpha \leq 1$, il existe $u \in \ell^1_\beta(\mathbb{Z})$ non cyclique dans $\ell^p_\beta(\mathbb{Z})$ tel que $\dim(\mathcal{Z}(\hat{u})) = \alpha$.*
4. *Si $p = \frac{2k}{2k-1}$ pour $k \in \mathbb{N}^*$, il existe $u \in \ell^1_\beta(\mathbb{Z})$ cyclique dans $\ell^p_\beta(\mathbb{Z})$ tel que $\dim(\mathcal{Z}(\hat{u})) = 1-\beta q$.*

$$\dim(\mathcal{Z}(\hat{u})) \qquad \overbrace{0 \quad\quad \tfrac{2}{q}(1-\beta q)}^{1.} \;\overbrace{\quad\quad\quad 1-\beta q}^{3.\ et\ 4.} \;\overbrace{\quad\quad 1}^{2.}$$

Pour la propriété *4.* nous avons un resultat optimal que lorsque p est de la forme $\frac{2k}{2k-1}$. Dans le cas p quelconque nous avons aussi des résultats mais on atteint pas la borne $\dim(\mathcal{Z}(\hat{u})) = 1-\beta q$.

Théorème. *Soit $1 < p < 2$, $\beta \geq 0$ tel que $\beta q \leq 1$ et $u \in \ell^1_\beta(\mathbb{Z})$.*

1. *Si $\mathcal{Z}(u)$ est de α-mesure forte nulle, avec $\alpha = \frac{2}{q}(1-\beta q)$, alors u est cyclique dans $\ell^p_\beta(\mathbb{Z})$.*
2. *Il existe $u \in \ell^1_\beta(\mathbb{Z})$ non cyclique dans $\ell^p_\beta(\mathbb{Z})$ vérifiant $H_h(\mathcal{Z}(u)) = 0$, où $h(t) = \frac{t^\alpha}{\ln(1/t)^\gamma}$ avec $\alpha = \frac{2}{q}(1-\beta q)$ et $\gamma > \frac{2}{q}$.*

Références

[1] A. BEURLING, *On a closure problem*, Ark. Mat. 1 (1951), 301–303

[2] J-P. KAHANE, R. SALEM, *Ensembles parfaits et séries trigonométriques*, Hermann (1963)

[3] T.W. KÖRNER, *Fourier Transforms of Distributions and Hausdorff Measures*, J Fourier Anal Appl. (2014) 20 :547-565

[4] N. LEV, A. OLEVSKII, *Wiener's 'closure of translates' problem and Piatetski-Shapiro's uniqueness phenomenon*, Ann. Math. (2) 174, No. 1, 519-541 (2011)

[5] D. J. NEWMAN, *The closure of translates in ℓ^p*, Amer. J. Math. 86 (1964), 651–667

[6] N. WIENER, *Tauberian theorems*, Ann. of Math. (2) 33 (1932), 1–100